

Cahier de vacances de la Toussaint — Corrigé

Le corrigé de toutes les séances : calcul minute, exercices rédigés comme sur une copie, et les erreurs à éviter

Corrige en rouge, puis recopie chaque erreur et sa correction : c'est là que se trouvent les points à gagner au prochain contrôle.

Séance 1 — Arithmétique : diviseurs et nombres premiers

Calcul minute

1. oui : il se termine par 5
2. oui : $2 + 7 + 1 + 8 = 18$
3. non : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
4. 1, 2, 3, 6, 9 et 18
5. non : $51 = 3 \times 17$
6. oui
7. $2^2 \times 3$
8. $2^2 \times 5^2$
9. $\frac{3}{7}$
10. 6

Exercice 1 — Les critères de divisibilité

	120	225	342	1 005	4 311
par 2	oui	non	oui	non	non
par 3	oui (3)	oui (9)	oui (9)	oui (6)	oui (9)
par 5	oui	oui	non	oui	non
par 9	non	oui	oui	non	oui

Entre parenthèses, la somme des chiffres. Un nombre divisible par 9 l'est aussi par 3, mais l'inverse est faux : 120 et 1 005.

Exercice 2 — Premier ou pas ?

37 est **premier** ; $39 = 3 \times 13$; $91 = 7 \times 13$; 97 est **premier** : il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, et $11 \times 11 = 121$ dépasse déjà 97 ; $111 = 3 \times 37$ ($1 + 1 + 1 = 3$) ; 2 est **premier**.

Erreur fréquente : croire que 91 est premier parce qu'il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Il faut aussi essayer $7 : 91 = 7 \times 13$.

Exercice 3 — Décomposer et simplifier

a. $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$; $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$; $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$.

b. $\frac{252}{540} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{2^2 \times 3^3 \times 5} = \frac{7}{3 \times 5} = \frac{7}{15}$. On a simplifié par $2^2 \times 3^2 = 36$.

Exercice 4 — Le plus grand nombre de sachets

a. $84 \div 14 = 6$ et $126 \div 14 = 9$: **oui**, chaque sachet contient **6 bonbons au citron et 9 à la fraise**.

b. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Le nombre de sachets doit diviser 84 et 126 ; le plus grand diviseur commun est le produit des facteurs communs : $2 \times 3 \times 7 = 42$. On peut faire au plus **42 sachets**.

c. $84 \div 42 = 2$ et $126 \div 42 = 3$: chaque sachet contient **2 bonbons au citron et 3 à la fraise**.

Erreur fréquente : multiplier tous les facteurs ($2^2 \times 3^2 \times 7$) : on ne garde que les facteurs présents dans les **deux** décompositions, avec le plus petit exposant.

Exercice 5 — Toujours un multiple de 3

$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$. Comme $n + 1$ est un entier, cette somme est 3 fois un entier : c'est toujours un multiple de 3.

Ce qui fait la note : vérifier sur trois ou quatre exemples et conclure. Des exemples ne prouvent rien pour tous les entiers ; le calcul avec n , si.

Séance 2 — Puissances et écriture scientifique

Calcul minute

- | | |
|-----------|-------------------------|
| 1. 32 | 6. 10^5 |
| 2. -8 | 7. 10^6 |
| 3. 10 000 | 8. 1 |
| 4. 0,001 | 9. $4,5 \times 10^{-3}$ |
| 5. 10^3 | 10. $2,3 \times 10^5$ |

Exercice 1 — Une seule puissance de 10

- a. $10^{3+5} = 10^8$
- b. $10^{7-9} = 10^{-2}$
- c. $10^{-2 \times 3} = 10^{-6}$
- d. $10^{4-6+1} = 10^{-1}$
- e. $\frac{10^8}{10^{-2}} = 10^{8-(-2)} = 10^{10}$

Erreur fréquente : en e), écrire 10^{8-2} : soustraire -2, c'est ajouter 2.

Exercice 2 — Écriture scientifique

- a. $5,2 \times 10^7$
- b. $3,8 \times 10^{-4}$
- c. $725 = 7,25 \times 10^2$, donc $7,25 \times 10^2 \times 10^3 = 7,25 \times 10^5$
- d. $0,06 = 6 \times 10^{-2}$, donc $6 \times 10^{-2} \times 10^{-5} = 6 \times 10^{-7}$

Exercice 3 — Calculer en écriture scientifique

- a. $A = (3 \times 4) \times 10^{5+(-2)} = 12 \times 10^3 = 1,2 \times 10^4$
- b. $B = \frac{6}{2} \times 10^{8-3} = 3 \times 10^5$
- c. $C = 5^2 \times (10^{-3})^2 = 25 \times 10^{-6} = 2,5 \times 10^{-5}$
- d. $D = \frac{2,4}{8} \times 10^{7-(-2)} = 0,3 \times 10^9 = 3 \times 10^8$

Erreur fréquente : s'arrêter à 12×10^3 ou à $0,3 \times 10^9$: le nombre devant la puissance de 10 doit être compris entre 1 et 10. $12 \times 10^3 = 1,2 \times 10 \times 10^3 = 1,2 \times 10^4$.

Exercice 4 — Des puissances dans un calcul

a. $E = 8 + 9 - 1 = 16$ ($4^0 = 1$)

b. $F = 9 - 9 = 0$

c. $G = 500 + 0,3 = 500,3$

d. $H = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$

Erreur fréquente : en b), écrire -3^2 au lieu de $(-3)^2$: avec les parenthèses, le carré porte sur -3 , et $(-3)^2 = 9$.

Exercice 5 — Des ordres de grandeur

a. $\frac{2 \times 10^{12}}{4 \times 10^6} = 0,5 \times 10^6 = 5 \times 10^5$, soit **500 000 photos**.

b. Temps = distance $\div$ vitesse = $\frac{1,5 \times 10^{11}}{3 \times 10^8} = 0,5 \times 10^3 = 500$ s. Comme $500 = 8 \times 60 + 20$, la lumière met environ **8 min 20 s**.

Séance 3 — Calcul littéral : développer, factoriser, prouver

Calcul minute

1. $4x + 12$

2. $-6 + 2x$

3. $x^2 - 5x$

4. $x^2 + 5x + 6$

5. $x^2 + 8x + 16$

6. $x^2 - 2x + 1$

7. $x^2 - 36$

8. $7(x + 3)$

9. $x(x - 3)$

10. $(x - 9)(x + 9)$

Exercice 1 — Développer et réduire

a. $A = 6x - 15 - 4x + 4 = 2x - 11$

b. $B = 2x^2 + x - 6x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$

c. $C = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

d. $D = (3x)^2 - 1^2 = 9x^2 - 1$

Erreur fréquente : en A, écrire $-4(x - 1) = -4x - 4$. Le -4 multiplie aussi le -1 : $(-4) \times (-1) = +4$.

Exercice 2 — Factoriser

a. $E = 6 \times 2x - 6 \times 3 = 6(2x - 3)$

b. $F = 5x \times x + 5x \times 2 = 5x(x + 2)$

c. $G = (x - 2)[(3x + 1) + (x + 4)] = (x - 2)(4x + 5)$

d. $H = (3x)^2 - 7^2 = (3x - 7)(3x + 7)$

e. $K = (2x + 1)^2 - 4^2 = (2x + 1 - 4)(2x + 1 + 4) = (2x - 3)(2x + 5)$

Erreur fréquente : en F, ne sortir que $5 : 5(x^2 + 2x)$ n'est pas fini, car x est encore commun aux deux termes. On sort le plus grand facteur commun, $5x$.

Exercice 3 — Deux chemins, un même résultat

- a. $L = x^2 + 10x + 25 - (x^2 + 4x - 5) = x^2 + 10x + 25 - x^2 - 4x + 5 = 6x + 30$
- b. $L = (x + 5)[(x + 5) - (x - 1)] = (x + 5)(x + 5 - x + 1) = (x + 5) \times 6 = 6(x + 5)$
- c. $6(x + 5) = 6x + 30$: on retrouve bien le résultat de a).

Erreur fréquente : en a), oublier les parenthèses autour de $(x + 5)(x - 1)$ développé : le signe $-$ devant le produit change tous les signes, d'où le $+ 5$ final.

Exercice 4 — Un programme de calcul

- a. Avec 3 : $3 + 4 = 7$; $7 \times 3 = 21$; $21 + 4 = 25$. Avec -5 : $-5 + 4 = -1$; $(-1) \times (-5) = 5$; $5 + 4 = 9$.
- b. $25 = 5^2$ et $9 = (-3)^2$: il semble que le résultat soit **le carré du nombre choisi augmenté de 2**.
- c. $(x + 4) \times x + 4 = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, d'après l'identité $(a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 2$. La conjecture est démontrée pour tout nombre x .
- d. $(10 + 2)^2 = 144$.

Exercice 5 — Toujours égale à $12x$

- a. $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 = 12x$, pour tout nombre x .
- b. Avec $x = 1\,000$: $1003^2 - 997^2 = 12 \times 1\,000 = 12\,000$.

Ce qui fait la note : en a), se contenter de tester $x = 1$ et $x = 2$. Il faut le calcul littéral, valable pour tous les nombres.

Séance 4 — Équations

Calcul minute

- | | |
|---------|--|
| 1. -4 | 6. -3 |
| 2. 7 | 7. 4 |
| 3. -4 | 8. 2 ou -5 |
| 4. 10 | 9. 6 ou -6 |
| 5. 4 | 10. aucune : un carré n'est jamais négatif |

Exercice 1 — Le premier degré

- a. $4x = 16$, donc $x = 4$. Vérification : $7 \times 4 - 4 = 24$ et $3 \times 4 + 12 = 24$.
- b. $2x - 6 = 5x + 9 \Leftrightarrow -3x = 15 \Leftrightarrow x = -5$. Vérification : $2 \times (-8) = -16$ et $5 \times (-5) + 9 = -16$.
- c. $4 - x - 2 = 3x - 6 \Leftrightarrow 2 - x = 3x - 6 \Leftrightarrow 8 = 4x \Leftrightarrow x = 2$. Vérification : $4 - 4 = 0$ et $6 - 6 = 0$.
- d. On multiplie les deux membres par 6 : $2x + 6 = 3x$, donc $x = 6$. Vérification : $2 + 1 = 3$ et $\frac{6}{2} = 3$.

Erreur fréquente : en c), écrire $4 - (x + 2) = 4 - x + 2$. Le signe $-$ devant la parenthèse change aussi le signe de 2.

Exercice 2 — Tester une valeur

- a. $(-2)^2 + 3 \times (-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$: **oui**
- b. $2 \times 3^2 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3$: **oui**
- c. $1^2 + 3 \times 1 + 2 = 6 \neq 0$: **non**

Exercice 3 — Produit nul et carrés

- a. $x - 7 = 0$ ou $2x + 3 = 0$: $x = 7$ ou $x = -1,5$
- b. $x = 0$ ou $4x - 1 = 0$: $x = 0$ ou $x = 0,25$
- c. $x = 7$ ou $x = -7$
- d. $x^2 = -4$: **aucune solution**, un carré n'est jamais négatif.
- e. $x^2 = 9$: $x = 3$ ou $x = -3$
- f. $(x + 1)^2 - 4^2 = (x + 1 - 4)(x + 1 + 4) = (x - 3)(x + 5) = 0$: $x = 3$ ou $x = -5$

Erreur fréquente : en b), oublier la solution 0 : le premier facteur est x lui-même.

Exercice 4 — Mettre en équation

- a. Soit x le prix d'un stylo, en euros ; un cahier coûte $x + 2$. Alors $3(x + 2) + 4x = 20 \Leftrightarrow 7x + 6 = 20 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$. **Un stylo coûte 2 € et un cahier 4 €**. Vérification : $3 \times 4 + 4 \times 2 = 12 + 8 = 20$.
- b. Soit n le plus petit : $n + (n + 1) + (n + 2) = 186 \Leftrightarrow 3n + 3 = 186 \Leftrightarrow 3n = 183 \Leftrightarrow n = 61$. **Les nombres sont 61, 62 et 63.**

Exercice 5 — Un rectangle et un carré

- a. $x(x + 5) = (x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 5x = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x = 4$. Le rectangle mesure 9 cm sur 4 cm, le carré 6 cm de côté : l'aire commune vaut **36 cm²**.
- b. $2(x + 5 + x) = 4(x + 2) \Leftrightarrow 4x + 10 = 4x + 8 \Leftrightarrow 10 = 8$, ce qui est faux. L'équation n'a aucune solution : **les périmètres ne sont jamais égaux** ; celui du rectangle dépasse toujours celui du carré de 2 cm.

Erreur fréquente : en a), développer $(x + 2)^2$ en $x^2 + 4$. Les termes en x^2 ne s'éliminent bien qu'avec le double produit $4x$.

Séance 5 — Pythagore et Thalès

Calcul minute

- | | |
|---------|---------------------------------|
| 1. 25 | 6. oui : $169 = 25 + 144$ |
| 2. 10 | 7. non : $36 \neq 16 + 25 = 41$ |
| 3. 12 | 8. 4 |
| 4. 25 | 9. 4 |
| 5. [BC] | 10. 8 |

Exercice 1 — Calculer une longueur avec Pythagore

- a. RST est rectangle en S, donc d'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RS^2 + ST^2 = 81 + 144 = 225$, donc **RT = 15 cm**.
- b. EFG est rectangle en E, donc $FG^2 = EF^2 + EG^2$, soit $289 = 64 + EG^2$. Ainsi $EG^2 = 225$ et **EG = 15 cm**.
- c. KLM est rectangle en K, donc $LM^2 = KL^2 + KM^2 = 25 + 49 = 74$ et **LM = $\sqrt{74}$ cm $\approx 8,6$ cm**.

Erreur fréquente : en b), écrire $EG^2 = 17^2 + 8^2$. L'hypoténuse est [FG], face à l'angle droit en E : on soustrait.

Exercice 2 — Rectangle ou pas ?

- a. Le plus grand côté est $[IK]$: $IK^2 = 841$ et $IJ^2 + JK^2 = 400 + 441 = 841$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, **IJK est rectangle en J**.
- b. $PR^2 = 121$ et $PQ^2 + QR^2 = 49 + 81 = 130$. $121 \neq 130$: d'après la contraposée du théorème de Pythagore, **PQR n'est pas rectangle**.
- c. $UW^2 = 42,25$ et $UV^2 + VW^2 = 6,25 + 36 = 42,25$: **UVW est rectangle en V**.

Erreur fréquente : conclure « rectangle » sans dire en quel sommet. L'angle droit est en face du plus grand côté : en J pour $[IK]$.

Exercice 3 — Un papillon

- a. Les droites (RT) et (SU) sont sécantes en O et $(RS) \parallel (TU)$, donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{OR}{OT} = \frac{OS}{OU} = \frac{RS}{TU}$, soit $\frac{4}{6} = \frac{5}{OU} = \frac{6}{TU}$.
- b. $OU = \frac{5 \times 6}{4} = 7,5 \text{ cm}$ et $TU = \frac{6 \times 6}{4} = 9 \text{ cm}$.

Erreur fréquente : mettre OR au-dessus de OS. Les deux longueurs d'un même rapport viennent de deux triangles différents : OR (petit triangle ORS) correspond à OT (grand triangle OTU).

Exercice 4 — Parallèles ou pas ?

- a. $\frac{AM}{AB} = \frac{2,4}{6} = 0,4$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{7,5} = 0,4$. Les rapports sont égaux et les points sont alignés dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès, **(MN) $\parallel$ (BC)**.
- b. $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} = 0,375$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{4}{10} = 0,4$. Les rapports sont différents : **(MN) et (BC) ne sont pas parallèles**.

Exercice 5 — Les deux théorèmes dans la même figure

- a. Dans ADE, le plus grand côté est $[DE]$: $DE^2 = 25$ et $AD^2 + AE^2 = 16 + 9 = 25$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, **ADE est rectangle en A**.
- b. Les droites (DB) et (EC) sont sécantes en A et $(DE) \parallel (BC)$, donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, soit $\frac{4}{10} = \frac{3}{AC} = \frac{5}{BC}$. Donc $AC = \frac{3 \times 10}{4} = 7,5 \text{ cm}$ et $BC = \frac{5 \times 10}{4} = 12,5 \text{ cm}$.
- c. L'angle en A est droit, donc $[AB]$ et $[AC]$ sont perpendiculaires : aire = $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{10 \times 7,5}{2} = 37,5 \text{ cm}^2$.

À vérifier : en c), utiliser BC dans le calcul de l'aire. La base et la hauteur sont les deux côtés de l'angle droit.
Contrôle : $10^2 + 7,5^2 = 156,25 = 12,5^2$.

Séance 6 — Notion de fonction

Calcul minute

- | | |
|-------|-----------|
| 1. -5 | 6. -1 |
| 2. 1 | 7. 8 |
| 3. -9 | 8. 8 |
| 4. 6 | 9. 1 et 3 |
| 5. 3 | 10. 63 |

Exercice 1 — Le vocabulaire

- a. L'image de 2 est **5**.
- b. **-1**, car $h(-1) = 0$.
- c. « 5 est **l'image** de 2 par h ».
- d. « L'image de 5 par h est 2 » et « 5 est **un antécédent de 2** par h ».

Exercice 2 — Un tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	10	1	-2	1	10

- a. Par exemple $p(-2) = 3 \times 4 - 2 = 10$ et $p(-1) = 3 \times 1 - 2 = 1$.
- b. Les antécédents de 1 lus dans le tableau sont **-1 et 1**.
- c. $p(1,5) = 3 \times 2,25 - 2 = \mathbf{4,75}$.

Erreur fréquente : calculer $3 \times (-2)^2$ comme $(3 \times (-2))^2 = 36$. Le carré porte sur x seul : $3 \times 4 = 12$, puis $12 - 2 = 10$.

Exercice 3 — Lecture graphique

- a. $k(0) = \mathbf{3}$; $k(1) = \mathbf{4}$; $k(4) = \mathbf{-5}$.
- b. Antécédents de 3 : **0 et 2** ; de 0 : **-1 et 3** ; de 4 : **1 seulement** (le sommet) ; de 5 : **aucun**, la courbe ne monte pas au-dessus de 4.
- c. Par exemple $k(2) = -4 + 4 + 3 = \mathbf{3}$: 2 est bien un antécédent de 3. De même, $k(3) = -9 + 6 + 3 = 0$.

Erreur fréquente : lire l'antécédent de 3 sur l'axe vertical. Un antécédent est une abscisse : on part de 3 sur l'axe des ordonnées et on lit sur l'axe des abscisses.

Exercice 4 — Une formule à partir d'une situation

- a. $m(x) = \mathbf{1,5x + 12}$: c'est une fonction affine.
- b. $m(10) = 15 + 12 = \mathbf{27}$: avec 10 emprunts dans l'année, on paie 27 €.
- c. $1,5x + 12 = 39 \Leftrightarrow 1,5x = 27 \Leftrightarrow x = 18$. **18 emprunts**. On a cherché **un antécédent** de 39.

Exercice 5 — Le graphique et le calcul

- a. Sur la courbe, la droite $y = 3$ coupe $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$ et $x = 4$. Par le calcul : $x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0 \text{ ou } x = 4}$.
- b. $(x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3 = f(x)$. Un carré est toujours positif ou nul, donc $f(x) \geq -1$ pour tout x : $f(x)$ ne peut jamais valoir -2, et **-2 n'a aucun antécédent**.

Ce qui fait la note : en a), « simplifier » $x^2 = 4x$ en divisant par x : on perd la solution 0. On factorise, puis on applique la règle du produit nul.

Test de rentrée — corrigé

N°	Réponse	Si c'est faux
1	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$	séance 1
2	$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$: plus grand diviseur commun $2 \times 3^2 = 18$. 18 sachets , de 5 billes rouges et 7 bleues .	séance 1
3	$6,4 \times 10^{-4}$; $30 \times 10^3 = 3 \times 10^4$	séance 2
4	$4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 = -12x + 9$	séance 3
5	$(5x)^2 - 1^2 = (5x - 1)(5x + 1)$	séance 3
6	$3x = 15$, $x = 5$	séance 4
7	$x = -6$ ou $x = 4$; $x = 9$ ou $x = -9$	séance 4
8	$AC^2 = 49 + 576 = 625$, AC = 25 cm	séance 5
9	$\frac{2}{5} = \frac{MN}{7,5}$, MN = 3 cm	séance 5
10	$f(-2) = 8 - 3 = 5$; $2x^2 - 3 = 15 \Leftrightarrow x^2 = 9$: -3 et 3	séance 6