

Cahier de vacances de la Toussaint — Corrigé

Le corrigé de toutes les séances : calcul minute, exercices rédigés comme sur une copie, et les erreurs à éviter

Corrige en rouge, puis recopie chaque erreur et sa correction. Compare surtout ta rédaction : les phrases d'initialisation, d'hérédité et de conclusion, les théorèmes cités, les hypothèses vérifiées.

Séance 1 — Le raisonnement par récurrence

Calcul minute

1. 55
2. 25
3. 1 024
4. $3n + 4$
5. $2 : u_{n+1} = 2u_n$
6. $2n + 1$
7. $u_1 = 5, u_2 = 14$
8. 2×3^n
9. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
10. non : $1^2 = 1 < 2$

Exercice 1 — Une somme d'impairs

Pour $n \geq 1$, on note $P(n)$: « $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite $1^2 = 1$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \geq 1$ tel que $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$. Le terme suivant est $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$, et d'après l'hypothèse de récurrence :

$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ pour tout $n \geq 1$.

Erreur fréquente : écrire le terme suivant $2k - 1 + 1$: on remplace n par $k + 1$ dans $2n - 1$, ce qui donne $2k + 1$.

Exercice 2 — Une inégalité

On note $P(n)$: « $3^n \geq 1 + 2n$ ». **Initialisation.** $3^0 = 1$ et $1 + 2 \times 0 = 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^k \geq 1 + 2k$. En multipliant par $3 > 0$: $3^{k+1} \geq 3 + 6k$. Or $(3 + 6k) - (1 + 2(k + 1)) = 4k \geq 0$, donc $3 + 6k \geq 1 + 2(k + 1)$. Ainsi $3^{k+1} \geq 1 + 2(k + 1)$.

Conclusion. Par récurrence, $3^n \geq 1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Erreur fréquente : s'arrêter à $3^{k+1} \geq 3 + 6k$: il reste à comparer $3 + 6k$ à $1 + 2(k + 1)$. Une différence dont on étudie le signe règle la question.

Exercice 3 — Une suite définie par récurrence

a. $v_1 = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$. **Initialisation :** $v_0 = 5 \geq 3$. **Hérédité :** si $v_k \geq 3$, alors $\frac{1}{3}v_k \geq 1$ (on multiplie par $\frac{1}{3} > 0$), donc $v_{k+1} \geq 1 + 2 = 3$. **Conclusion :** $v_n \geq 3$ pour tout n .

b. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}v_n + 2 - v_n = -\frac{2}{3}v_n + 2 = -\frac{2}{3}(v_n - 3)$. D'après a), $v_n - 3 \geq 0$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$: (v_n) est décroissante.

c. **Initialisation :** $3 + 2 \times (\frac{1}{3})^0 = 5 = v_0$. **Hérédité :** si $v_k = 3 + 2(\frac{1}{3})^k$, alors $v_{k+1} = \frac{1}{3}(3 + 2(\frac{1}{3})^k) + 2 = 1 + 2(\frac{1}{3})^{k+1} + 2 = 3 + 2(\frac{1}{3})^{k+1}$. **Conclusion :** $v_n = 3 + 2(\frac{1}{3})^n$ pour tout n .

Exercice 4 — Divisibilité, et une récurrence qui démarre tard

- a. **Initialisation** : $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$. **Hérédité** : si $4^k - 1 = 3m$ avec m entier, alors $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3 = 12m + 3 = 3(4m + 1)$, et $4m + 1$ est entier. **Conclusion** : $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout n .
- b. $2^3 = 8 < 9 = 3^2$: $P(3)$ est fausse ; $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$: $P(4)$ est vraie. **Hérédité** : soit $k \geq 4$ tel que $2^k \geq k^2$. Alors $2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2k^2$. Or $2k^2 - (k+1)^2 = (k-1)^2 - 2 \geq 9 - 2 > 0$, car $k-1 \geq 3$. Donc $2^{k+1} \geq (k+1)^2$. **Conclusion** : $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$.

Remarque : initialiser à 0 parce que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies : l'hérédité ne marche qu'à partir de 3 ($k-1 \geq 2$ donne $(k-1)^2 - 2 \geq 0$), et $P(3)$ est fausse. La récurrence doit démarrer à 4.

Séance 2 — Limites de suites

Calcul minute

- | | |
|--------------|-------------------------------------|
| 1. 0 | 7. 2 |
| 2. $+\infty$ | 8. $+\infty : n^2(1 - \frac{1}{n})$ |
| 3. 3 | |
| 4. 0 | 9. 0 : c'est $\frac{1}{n}$ |
| 5. $+\infty$ | |
| 6. $-\infty$ | 10. pas de limite |

Exercice 1 — Par les opérations

- a. $3n^2 \rightarrow +\infty$ et $2n - 1 \rightarrow +\infty$; par somme, $a_n \rightarrow +\infty$.
- b. $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$, donc $\frac{4}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$; par différence, $b_n \rightarrow 5$.
- c. $2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$ et $n + 3 \rightarrow +\infty$; par produit ($2 > 0$), $c_n \rightarrow +\infty$.
- d. $n^2 + 1 \rightarrow +\infty$, donc par quotient $d_n \rightarrow 0$.
- e. $-2n \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$; par somme, $e_n \rightarrow -\infty$.

Exercice 2 — Lever une forme indéterminée

- a. Forme « $+\infty - \infty$ ». $a_n = n^2(1 - \frac{5}{n})$, avec $1 - \frac{5}{n} \rightarrow 1$: $a_n \rightarrow +\infty$.

b. Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». $b_n = \frac{n^2(3 + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n})} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} : b_n \rightarrow 3$.

c. $c_n = \frac{n(1 + \frac{2}{n})}{n^2(1 - \frac{3}{n^2})} = \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{n^2}} \rightarrow 0 \times 1 : c_n \rightarrow 0$.

d. $d_n = \frac{-4 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^3}} \rightarrow \frac{-4}{2} : d_n \rightarrow -2$.

- e. Forme « $+\infty - \infty$ ». $e_n = \sqrt{n}(1 - \sqrt{n})$, avec $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ et $1 - \sqrt{n} \rightarrow -\infty$: par produit, $e_n \rightarrow -\infty$.

Erreur fréquente : en b), conclure « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ ». Le quotient des termes dominants, $\frac{3n^2}{n^2} = 3$, donne la limite.

Exercice 3 — Suites géométriques

a. $-1 < 0,8 < 1$, donc $0,8^n \rightarrow 0$ et $a_n \rightarrow 0$.

b. $2 > 1$, donc $2^n \rightarrow +\infty$ et $b_n \rightarrow +\infty$.

c. $0 < \frac{1}{3} < 1$, donc $c_n \rightarrow 4$.

d. $-1 < -0,5 < 1$, donc $d_n \rightarrow 0$, bien que les termes changent de signe.

e. Somme de $n + 1$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$: $S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) = 2 - (\frac{1}{2})^n$.

Comme $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$, $S_n \rightarrow 2$.

Exercice 4 — Comparer et encadrer

a. $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$. Or $n - 1 \rightarrow +\infty$: d'après le théorème de comparaison, $u_n \rightarrow +\infty$.

b. $2 \leq 3 + (-1)^n \leq 4$; on divise par $n > 0$: $\frac{2}{n} \leq v_n \leq \frac{4}{n}$. Les deux encadrants tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, $v_n \rightarrow 0$.

c. $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$, donc $2 - \frac{1}{n} \leq w_n \leq 2 + \frac{1}{n}$. Les deux encadrants tendent vers 2 : par les gendarmes, $w_n \rightarrow 2$.

Erreur fréquente : dire « $(-1)^n$ n'a pas de limite, donc v_n non plus ». Le facteur $\frac{1}{n}$ écrase l'oscillation : c'est exactement le rôle de l'encadrement.

Séance 3 — Suites monotones et convergence

Calcul minute

- | | |
|---|------------------------|
| 1. croissante ($u_{n+1} - u_n = 2$) | 6. convergente |
| 2. décroissante (différence -3) | 7. tend vers $-\infty$ |
| 3. décroissante (raison 0,5, termes > 0) | 8. 6 |
| 4. ni l'un ni l'autre : 1 ; -2 ; 4 | 9. 0 ou 1 |
| 5. 1 | 10. 2 |

Exercice 1 — Sens de variation

a. $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 4(n+1) - n^2 + 4n = 2n - 3$, strictement positif dès que $n \geq 2$. Avec $a_0 = 0$, $a_1 = -3$, $a_2 = -4$: **croissante à partir du rang 2**.

b. $b_n > 0$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 0,9 < 1$: **(b_n) est décroissante**.

c. $c_{n+1} - c_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: **(c_n) est croissante**.

Exercice 2 — Vrai ou faux ?

- a. **Faux** : $\frac{n}{n+1}$ est croissante (exercice 1) et tend vers 1.
- b. **Faux** : la même suite est majorée par 3 et tend vers 1. La limite est seulement inférieure ou égale à 3.
- c. **Vrai** : c'est le théorème de convergence monotone (et la limite est positive ou nulle).
- d. **Faux** : $\frac{(-1)^n}{n+1}$ tend vers 0 (gendarmes), mais ses termes $1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} \dots$ montent et descendent.
- e. **Faux** : $(-1)^n n$ vaut $0 ; -1 ; 2 ; -3 ; 4 \dots$ Elle n'est pas majorée, mais ses termes de rang impair tendent vers $-\infty$: elle n'a pas de limite.

Exercice 3 — Une suite arithmético-géométrique

- a. **Initialisation** : $u_0 = 0, u_1 = 1$, et $0 \leq 1 \leq 5$. **Hérédité** : si $u_k \leq u_{k+1} \leq 5$, on multiplie par $0,8 > 0$ puis on ajoute 1 : $0,8u_k + 1 \leq 0,8u_{k+1} + 1 \leq 5$, soit $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 5$. **Conclusion** : $u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ pour tout n .
- b. (u_n) est croissante et majorée par 5 : elle converge vers un réel ℓ . En passant à la limite dans $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$: $\ell = 0,8\ell + 1$, donc $0,2\ell = 1$ et $\ell = 5$.
- c. $v_{n+1} = 0,8u_n + 1 - 5 = 0,8(u_n - 5) = 0,8v_n$: (v_n) est géométrique de raison $0,8$, de premier terme $v_0 = -5$. Donc $v_n = -5 \times 0,8^n$ et $u_n = 5 - 5 \times 0,8^n$. Comme $0,8^n \rightarrow 0$, on retrouve $u_n \rightarrow 5$.

Exercice 4 — L'escalier qui redescend

- a. $u_1 = \frac{48}{10} = \frac{24}{5} = 4,8$; $u_2 = \frac{6 \times 4,8}{6,8} = \frac{144}{34} = \frac{72}{17} \approx 4,235$.
- b. **Initialisation** : $4 \leq 4,8 \leq 8 \leq 8$. **Hérédité** : si $4 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 8$, comme f est croissante sur $[4 ; 8]$, $f(4) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(8)$, soit $4 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4,8 \leq 8$. **Conclusion** : l'encadrement est vrai pour tout n .
- c. (u_n) est décroissante et minorée par 4 : elle converge vers $\ell \in [4 ; 8]$. f est continue sur $[4 ; 8]$, donc $f(\ell) = \ell$, soit $\ell = 0$ ou $\ell = 4$ (comme dans la fiche méthode). Comme $\ell \geq 4$, $\ell = 4$.

Erreur fréquente : écrire « décroissante et minorée par 4, donc elle tend vers 4 » : c'est l'équation $f(\ell) = \ell$, et elle seule, qui donne la valeur de la limite.

Séance 4 — Rappels de dérivation

Calcul minute

1. $5x^4$

2. $-\frac{1}{x^2}$

3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $6x - 4$

5. $6(2x + 1)^2$

6. $-\frac{1}{(x+2)^2}$

7. $y = 2x - 1$

8. 3

9. $]-\infty ; 3]$

10. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Exercice 1 — Dériver

a. $f'(x) = 12x^2 - 10x + 2$.

b. Produit, avec $u = x^2 + 1$, $v = \sqrt{x}$: $g'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$.

c. Quotient : $h'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$.

d. Composée affine ($a = -2$) : $k'(x) = -2 \times 4(1-2x)^3 = -8(1-2x)^3$.

e. $\frac{1}{v}$ avec $v = x^2 + 1$: $m'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

Erreur fréquente : en b), oublier que $2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} = 4x^2$ au moment de réduire au même dénominateur.

Exercice 2 — Tangentes

a. $f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$. $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$: $y = 3x - 1$.

b. $f(2) = 1$ et $f'(2) = \frac{1}{3}$: $y = \frac{1}{3}(x-2) + 1$, soit $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

c. Parallèle à $y = 3x \Leftrightarrow f'(a) = 3 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 1 \Leftrightarrow a+1 = 1$ ou $a+1 = -1 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = -2$. En 0 : $y = 3x - 1$. En -2 : $f(-2) = 5$, d'où $y = 3(x+2) + 5 = 3x + 11$.

Exercice 3 — Un tableau de variations

a. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

b. $f'(x) > 0$ sur $[0; 1[$ et $]3; 4]$, $f'(x) < 0$ sur $]1; 3[$. $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$:

x	0	1	3	4
f'(x)	+	0	-	0
f(x)	1	5	1	5

c. Maximum **5**, atteint en **1** et en **4** ; minimum **1**, atteint en **0** et en **3**.

Exercice 4 — La boîte de volume maximal

a. Il faut $x > 0$ et $12 - 2x > 0$, d'où $x \in]0; 6[$. La base est un carré de côté $12 - 2x$, la hauteur vaut x : $V(x) = x(12 - 2x)^2$.

b. Produit : $V'(x) = (12 - 2x)^2 + x \times 2(12 - 2x) \times (-2) = (12 - 2x)[(12 - 2x) - 4x] = (12 - 2x)(12 - 6x)$.

c. Sur $]0; 6[$, $12 - 2x > 0$; $12 - 6x$ est positif sur $]0; 2[$ et négatif sur $]2; 6[$. V croît puis décroît : le maximum est atteint pour $x = 2$ cm, et $V(2) = 2 \times 8^2 = 128$ cm³.

Erreur fréquente : dériver $(12 - 2x)^2$ en $2(12 - 2x)$: le facteur $a = -2$ manque.

Séance 5 — La fonction exponentielle

Calcul minute

1. 1

2. e^2

3. e^6

4. e^3

5. e^4

6. e

7. $3e^{3x}$

8. $-2xe^{-x^2}$

9. 3

10. 0

Exercice 1 — Simplifier

- a. $A = e^{3-5-(-2)} = e^0 = 1$
- b. $B = e^{2x} \times e^{-2x+1} = e$
- c. $C = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$
- d. $D = e^{(2x+3)-(x-1)} = e^{x+4}$

Erreur fréquente : en C, oublier le double produit, ou écrire $e^x e^{-x} = 0$: c'est $e^0 = 1$.

Exercice 2 — Équations et inéquations

exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$ et $e^A < e^B \Leftrightarrow A < B$.

- a. $3x - 2 = x + 4 \Leftrightarrow x = 3$: **S = {3}**.
- b. $x^2 = 5x - 6 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$: **S = {2 ; 3}**.
- c. $1 = e^0$, donc $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$: **S =]-∞ ; $\frac{1}{2}$ [**.
- d. Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - (e + 1)X + e = (X - 1)(X - e) = 0$, donc $X = 1$ ou $X = e$, soit $e^x = e^0$ ou $e^x = e^1$: **S = {0 ; 1}**.
- e. $e^x > 0$, donc le produit a le signe de $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, négatif entre les racines : **S = [-2 ; 2]**.

Exercice 3 — Dériver et étudier

- a. Produit, avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$: $f'(x) = 2e^{-x} - (2x + 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - 2x$: **f croissante sur]-∞ ; $\frac{1}{2}$], décroissante sur [$\frac{1}{2}$; +∞[**. Maximum : $f(\frac{1}{2}) = 2e^{-0,5} = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21$.
- b. $g'(x) = (2x - 2)e^{x^2 - 2x}$, du signe de $2x - 2$: **g est décroissante sur]-∞ ; 1], croissante sur [1 ; +∞[**. Minimum : **g(1) = $e^{-1} \approx 0,37$** .

Exercice 4 — Limites et croissances comparées

- a. $e^x - x = x(\frac{e^x}{x} - 1)$; par croissances comparées $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$, donc par produit **+∞**.
- b. $\frac{e^x + 3}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{3}{x} \rightarrow +\infty + 0 = +\infty$.
- c. $(x + 2)e^x = xe^x + 2e^x \rightarrow 0 + 0 = 0$ (croissances comparées et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$).
- d. $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \rightarrow 0$.
- e. On factorise par e^x : $\frac{3e^x + 1}{e^x + 2} = \frac{3 + e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$, et $e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: la limite vaut **3**.

Erreur fréquente : en a), écrire « $+\infty - \infty = +\infty$ parce que l'exponentielle est plus grande » sans factoriser : c'est la factorisation qui fait apparaître la croissance comparée.

Séance 6 — Limites de fonctions

Calcul minute

- | | |
|--------------|-------------------------------------|
| 1. $+\infty$ | 6. 3 |
| 2. $-\infty$ | 7. $+\infty : x^2(1 + \frac{1}{x})$ |
| 3. 0 | 8. 2 |
| 4. $+\infty$ | 9. $+\infty$ |
| 5. $-\infty$ | 10. 4 |

Exercice 1 — Sans forme indéterminée

- a. Somme de limites $+\infty$: $+\infty$
- b. $-2x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$, et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$: $+\infty$
- c. $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $+\infty$
- d. $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$: **4**
- e. Pas de forme indéterminée : le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 2 : **1**

Exercice 2 — Lever une forme indéterminée

- a. « $-\infty + \infty$ » : $x^3(1 + \frac{5}{x})$, avec $x^3 \rightarrow -\infty$ et $1 + \frac{5}{x} \rightarrow 1$: $-\infty$
- b. $\frac{x^2(3 - \frac{1}{x})}{x^2(\frac{1}{x^2} - 1)} = \frac{3 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} \rightarrow \frac{3}{-1} = \mathbf{-3}$
- c. $\frac{1}{x} \times \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} \rightarrow 0 \times 1 = \mathbf{0}$
- d. « $\frac{0}{0}$ » : $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ pour $x \neq 3 \rightarrow \mathbf{6}$
- e. « $\frac{0}{0}$ » : $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$ pour $x \neq 1 \rightarrow \mathbf{\frac{3}{2}}$

Erreur fréquente : en d) et e), chercher un terme dominant : en un réel, on factorise par $(x - a)$, car a est racine du numérateur et du dénominateur.

Exercice 3 — Deux asymptotes

En $\pm\infty$: $g(x) = \frac{x(-1 + \frac{4}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} \rightarrow -1$: **la droite $y = -1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.**

En -2 : $-x + 4 \rightarrow 6 > 0$; $x + 2 \rightarrow 0$, positif si $x > -2$ et négatif si $x < -2$. Donc $g(x) \rightarrow +\infty$ à droite de -2 et $-\infty$ à gauche : **la droite $x = -2$ est asymptote verticale.**

Exercice 4 — Trois asymptotes et une position

- a. $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$: $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

b. $h(x) = \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 2$ en $\pm\infty$: **$y = 2$ asymptote horizontale.**

- c. Le numérateur tend vers 5 en 1 et en -1 . $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ est positif sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, négatif sur $]-1 ; 1[$. En 1 : $+\infty$ à droite, $-\infty$ à gauche. En -1 : $+\infty$ à gauche, $-\infty$ à droite. **Les droites $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes verticales.**

- d. $h(x) - 2 = \frac{2x^2 + 3 - 2(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{5}{x^2 - 1}$, du signe de $x^2 - 1$: **$\mathcal{C}_h$ est au-dessus de $y = 2$ sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, en dessous sur $]-1 ; 1[$.**

Test de rentrée — corrigé

N°	Réponse	Si c'est faux
1	Init. $4^0 = 1 \geq 1$. Hér. si $4^k \geq 3k + 1$, alors $4^{k+1} \geq 12k + 4 \geq 3k + 4 = 3(k + 1) + 1$. Concl. vraie pour tout n	séance 1
2	Init. $2^0 + 1 = 2 = u_0$. Hér. $u_{k+1} = 2(2^k + 1) - 1 = 2^{k+1} + 1$. Concl. $u_n = 2^n + 1$	séance 1
3	$\frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow 2$	séance 2
4	$-1 < 0,9 < 1 : 0 ; 2 > 1 : +\infty$	séance 2
5	$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(n+2)(n+3)} > 0 ; n < n+2$ donne $u_n < 1$. Croissante et majorée : converge (vers 1)	séance 3
6	$\ell = 0,5\ell + 1 \Leftrightarrow \ell = 2$	séance 3
7	$\frac{2x(x-2) - (x^2 + 1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$	séance 4
8	$f(1) = -1, f'(1) = 3 - 2 = 1 : y = x - 2$	séance 4
9	$2x - 1 \geq x + 2 \Leftrightarrow S = [3 ; +\infty[; (1-x)e^{-x}$	séance 5
10	Limite 3 en $\pm\infty : y = 3$; en $-1, 3x - 1 \rightarrow -4$ et $x + 1 \rightarrow 0$: limites infinies, $x = -1$	séance 6