

Cahier de vacances de la Toussaint

Six séances pour consolider les bases du début d'année : récurrence, suites, dérivation, exponentielle et limites

COMMENT UTILISER CE LIVRET

Six séances, une par jour, d'une heure environ. Chacune suit le même déroulé :

Étape	Durée	Ce que tu fais
1. L'essentiel	15 min	Lis les encadrés, refais les exemples rédigés sans regarder, puis recopie de mémoire les théorèmes au brouillon.
2. Calcul minute	5 min	Chronomètre-toi, sans calculatrice. Note ton score et ton temps.
3. Exercices	30 à 40 min	Dans l'ordre des étoiles : ★ appliquer le cours, ★★ rédiger une démonstration courte, ★★★ enchaîner plusieurs étapes.
4. Correction	10 min	Avec le corrigé, en rouge. Compare ta rédaction , pas seulement le résultat : au baccalauréat, chaque théorème se nomme , chaque hypothèse se vérifie , chaque réponse se termine par une phrase de conclusion .
5. Bilan	2 min	Coche ce que tu sais faire. Ce qui n'est pas coché sera repris au dernier jour.

Le programme des deux semaines

Jour	Séance	Thème
Semaine 1 · jour 1	1. Le raisonnement par récurrence	Les suites et la récurrence
Semaine 1 · jour 2	2. Limites de suites	
Semaine 1 · jour 3	3. Suites monotones et convergence	
Semaine 2 · jour 1	4. Rappels de dérivation	Les fonctions
Semaine 2 · jour 2	5. La fonction exponentielle	
Semaine 2 · jour 3	6. Limites de fonctions	
Semaine 2 · jour 4	Test de rentrée (20 min), puis reprise de toutes les cases « Je sais faire » non cochées.	

Les jours sans séance, refais un calcul minute déjà fait et essaie de battre ton temps.

LA RÈGLE D'OR : DES FICHES « MÉTHODE », PAS SEULEMENT DES FICHES « COURS »

À la fin de chaque séance, écris sur une petite fiche une méthode en trois étapes, avec un exemple rédigé. Une fiche « Cours » dit *ce qui est vrai* ; une fiche « Méthode » dit *quoi faire et comment l'écrire*, et c'est elle qu'on relit la veille d'un devoir.

1. Comment rédiger une récurrence ?
2. Comment lever une forme indéterminée ?
3. Comment étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$?
4. Comment dresser un tableau de variations ?
5. Comment résoudre une équation ou une inéquation avec des exponentielles ?
6. Comment trouver les asymptotes d'une courbe ?

La fiche 1 est entièrement rédigée pour toi à la séance 1 : sers-t'en de modèle.

1 Séance 1 — Le raisonnement par récurrence

Objectif : rédiger une démonstration par récurrence complète, sans oublier aucune des trois étapes.

LE PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n , et n_0 un entier naturel. Si :

- **initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
 - **hérédité** : pour tout entier $k \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie ;
- alors $P(n)$ est vraie **pour tout entier $n \geq n_0$** . Image : le premier domino tombe, chaque domino fait tomber le suivant, donc tous tombent.

AU BROUILLON, AVANT DE RÉDIGER

Écris $P(k)$ et $P(k+1)$ l'un sous l'autre, en remplaçant n par k , puis par $k+1$. Entoure ce qui change entre les deux lignes : c'est ce pont que l'hérédité doit construire.

FICHE MÉTHODE — COMMENT RÉDIGER UNE RÉCURRENCE ?

1. **Énoncer $P(n)$ et le rang de départ.** Puis **initialisation** : calculer *séparément* les deux membres au rang n_0 et constater l'égalité (ou l'inégalité).
2. **Hérédité** : « Soit $k \geq n_0$ un entier tel que $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. » Partir de l'expression au rang $k+1$, **utiliser l'hypothèse de récurrence en le disant**, arriver à la forme voulue.
3. **Conclusion** : « $P(n_0)$ est vraie et la propriété est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. »

Au brouillon, écris d'abord $P(k+1)$ en entier : c'est le but de l'hérédité, il doit être sous tes yeux.

Sur ta copie. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$: « $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \geq 1$ tel que $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
Montrons que $1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$1 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ d'après l'hypothèse de récurrence,

donc $1 + \dots + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(1)$ est vraie et P est héréditaire : par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

UNE INÉGALITÉ : POUR TOUT $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$

Initialisation : $2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$, donc $2^0 \geq 0 + 1$.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \geq k + 1$. En multipliant par $2 > 0$, $2^{k+1} \geq 2k + 2$. Or $2k + 2 = (k+2) + k \geq k+2$, car $k \geq 0$. Donc $2^{k+1} \geq (k+1) + 1$.

Conclusion : par récurrence, $2^n \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

UNE SUITE MAJORÉE

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ (donc $u_1 = 2,5$; $u_2 = 3,25$).

Montrons que $u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 1 \leq 4$.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \leq 4$. En multipliant par $\frac{1}{2} > 0$, $\frac{1}{2}u_k \leq 2$, donc $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + 2 \leq 4$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

TROIS PIÈGES

Oublier l'initialisation : « 3 divise $4^n + 1$ » est héréditaire, car $4^{k+1} + 1 = 4(4^k + 1) - 3$; pourtant elle est toujours fausse ($4^0 + 1 = 2$). Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien.

Supposer ce qu'on veut démontrer : on suppose $P(k)$ pour un entier k fixé, jamais « pour tout n ».

Ne pas citer l'hypothèse : le correcteur cherche le moment où elle sert. Écris « d'après l'hypothèse de récurrence ».

🕒 Calcul minute — 5 min chrono, sans calculatrice

1. $1 + 2 + \dots + 10 = \dots\dots\dots$
2. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \dots\dots\dots$
3. $2^{10} = \dots\dots\dots$
4. Si $u_n = 3n + 1$, $u_{n+1} = \dots\dots\dots$
5. Si $u_n = 2^n$, $u_{n+1} = \dots \times u_n : \dots\dots\dots$
6. $(n + 1)^2 - n^2 = \dots\dots\dots$
7. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 1 : u_2 = \dots\dots\dots$
8. $3^{n+1} - 3^n = \dots\dots\dots$
9. $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dots\dots\dots$
10. « $n^2 \geq 2n$ » est-elle vraie pour $n = 1$? $\dots\dots\dots$

Essai 1 : / 10 en min · Essai 2, deux jours plus tard : / 10 en min

Exercices

Exercice 1 — Une somme d'impairs ★

Recopier le modèle de la fiche méthode, étape par étape.

Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Exercice 2 — Une inégalité ★★

Multiplier une inégalité par un nombre positif, puis comparer.

Démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2n$.

Exercice 3 — Une suite définie par récurrence ★★

Minorer, étudier le sens de variation, trouver la forme explicite.

On définit la suite (v_n) par $v_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2$.

- a. Calcule v_1 . Démontre par récurrence que $v_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b. Montre que $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{3}(v_n - 3)$. Dédus-en le sens de variation de (v_n) .
- c. Démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 + 2 \times (\frac{1}{3})^n$.

Exercice 4 — Divisibilité, et une récurrence qui démarre tard ★★★

Choisir le bon rang d'initialisation.

- a. Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3. Indication : $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3$.
- b. On note $P(n)$: « $2^n \geq n^2$ ». Vérifie que $P(3)$ est fausse et que $P(4)$ est vraie. Démontre par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 4$. Indication : $2k^2 - (k+1)^2 = (k-1)^2 - 2$.

JE SAIS FAIRE — COCHE QUAND C'EST ACQUIS

- ☐ rédiger les trois étapes d'une récurrence, avec la phrase de conclusion ;
- ☐ utiliser l'hypothèse de récurrence en le disant ;
- ☐ démontrer une égalité, une inégalité ou une majoration de suite par récurrence.

Pour aller plus loin : la fiche « Suites numériques » sur progressschool.fr/reviser/maths/1ere/suites-numeriques (rappels de 1re)

2 Séance 2 — Limites de suites

Objectif : calculer une limite par les opérations, reconnaître une forme indéterminée et la lever.

CE QUE SIGNIFIE UNE LIMITE

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$: tout intervalle ouvert contenant ℓ contient **tous les termes** de la suite à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) **converge** vers ℓ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$: tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

LIMITES DE RÉFÉRENCE

$n, n^2, n^3, \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$.

$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}$ tendent vers 0.

Suites géométriques : si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$; si $q = 1$, $q^n = 1$; si $-1 < q < 1$, $q^n \rightarrow 0$; si $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite.

Opération	Résultats	Formes indéterminées
Somme	$\ell + \ell'$; $\ell + (+\infty) = +\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) + (-\infty)$
Produit	$\ell \times \ell'$; $\ell \times \infty = \infty$ si $\ell \neq 0$; $\infty \times \infty = \infty$ (règle des signes)	$0 \times \infty$
Quotient	$\frac{\ell}{\infty} = 0$; $\frac{\infty}{\ell'} = \infty$ si $\ell' \neq 0$; $\frac{\ell}{0} = \infty$ si $\ell \neq 0$ et le dénominateur garde un signe constant	$\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

FICHE MÉTHODE — COMMENT LEVER UNE FORME INDÉTERMINÉE ?

1. Remplacer chaque morceau par sa limite et **écrire la forme obtenue** : « $+\infty - \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ »...
2. **Factoriser par le terme dominant** : la plus haute puissance de n , au numérateur et au dénominateur séparément.
3. Simplifier, puis conclure par les opérations, en **nommant** les limites utilisées.

Exemples : $n^2 - 3n = n^2(1 - \frac{3}{n}) \rightarrow +\infty \times 1 = +\infty$. $\frac{2n+1}{n+3} = \frac{n(2 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{3}{n})} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2$.

THÉORÈMES DE COMPARAISON

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n$ et $w_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

Exemple : $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$ et $n^2 - 1 \rightarrow +\infty$, donc $n^2 + (-1)^n \rightarrow +\infty$.

THÉORÈME DES GENDARMES

Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si (v_n) et (w_n) convergent vers la **même** limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

Exemple : pour $n \geq 1$, $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$, donc $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$.

DEUX PIÈGES

« $\infty - \infty = 0$ » : faux. $n^2 - n \rightarrow +\infty$, $n - n^2 \rightarrow -\infty$ et $(n+1) - n \rightarrow 1$. C'est bien une forme *indéterminée*.

Une suite géométrique à raison négative : $(-0,5)^n \rightarrow 0$, mais $(-2)^n$ n'a pas de limite.

ÉCRIS LA FORME AVANT DE CALCULER

Écris d'abord ce que donnent les morceaux (« par somme, $+\infty - \infty$: forme indéterminée »). Si c'est une forme indéterminée, entoure-la : c'est le signal pour factoriser.

🕒 Calcul minute — 5 min chrono, sans calculatrice

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \dots\dots\dots$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n) = \dots\dots\dots$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - \frac{2}{n}) = \dots\dots\dots$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = \dots\dots\dots$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,2^n = \dots\dots\dots$

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 1) = \dots\dots\dots$

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = \dots\dots\dots$

8. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) = \dots\dots\dots$

9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \dots\dots\dots$

10. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \dots\dots\dots$

Essai 1 : / 10 en min · Essai 2, deux jours plus tard : / 10 en min

Exercices

Exercice 1 — Par les opérations ★

Aucune forme indéterminée : nommer les limites et conclure.

Détermine la limite de chaque suite.

a. $a_n = 3n^2 + 2n - 1$

b. $b_n = 5 - \frac{4}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1)$

c. $c_n = (2 + \frac{1}{n})(n+3) \quad (n \geq 1)$

d. $d_n = \frac{7}{n^2 + 1}$

e. $e_n = -2n + \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$

Exercice 2 — Lever une forme indéterminée ★★

Écrire la forme, factoriser par le terme dominant.

Détermine la limite de chaque suite.

a. $a_n = n^2 - 5n$

b. $b_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} \quad (n \geq 1)$

c. $c_n = \frac{n+2}{n^2-3} \quad (n \geq 2)$

d. $d_n = \frac{-4n^3 + n}{2n^3 + 5}$

e. $e_n = \sqrt{n} - n$

Exercice 3 — Suites géométriques ★★

Repérer la raison, puis appliquer la règle de q^n .

Détermine la limite de chaque suite.

a. $a_n = 3 \times 0,8^n$

b. $b_n = 2^n - 5$

c. $c_n = (\frac{1}{3})^n + 4$

d. $d_n = (-0,5)^n$

e. $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + (\frac{1}{2})^n$: montre que $S_n = 2 - (\frac{1}{2})^n$.

Exercice 4 — Comparer et encadrer ★★★

Choisir le bon théorème et vérifier ses hypothèses.

Pour $n \geq 1$, on pose :

a. $u_n = n + (-1)^n$. Montre que $u_n \geq n - 1$, puis conclus.

b. $v_n = \frac{3 + (-1)^n}{n}$. Encadre v_n entre $\frac{2}{n}$ et $\frac{4}{n}$, puis conclus.

c. $w_n = \frac{2n + (-1)^n}{n}$. Encadre w_n , puis détermine sa limite.

JE SAIS FAIRE — COCHE QUAND C'EST ACQUIS

- ☐ donner les limites de référence et celle de q^n selon q ;
- ☐ reconnaître les quatre formes indéterminées et les lever en factorisant ;
- ☐ utiliser le théorème de comparaison et celui des gendarmes en vérifiant leurs hypothèses.

Pour aller plus loin : la fiche « Suites numériques » sur progressschool.fr/reviser/maths/1ere/suites-numeriques (rappels de 1re)

3 Séance 3 — Suites monotones et convergence

Objectif : étudier le sens de variation d'une suite, la borner, et en déduire qu'elle converge.

SENS DE VARIATION

(u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ,
décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n . Trois outils :

- le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si tous les termes sont strictement positifs, la

comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ;

- si $u_n = f(n)$, les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

DEUX EXEMPLES

$u_n = n^2 + n$: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = 2n + 2 > 0$, donc (u_n) est croissante.

$v_n = \frac{2}{3^n} > 0$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$, donc (v_n) est décroissante.

MAJORÉE, MINORÉE, BORNÉE

(u_n) est **majorée** s'il existe M tel que $u_n \leq M$ pour tout n ;
minorée s'il existe m tel que $u_n \geq m$ pour tout n ; **bornée** si elle est les deux.

THÉORÈME DE CONVERGENCE MONOTONE

Toute suite **croissante et majorée** converge. Toute suite **décroissante et minorée** converge.

Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$; une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

PIÈGE

Le théorème dit que la suite converge, **pas vers quoi** : $\frac{n}{n+1}$ est croissante, majorée par 3, et tend vers 1, pas vers 3.

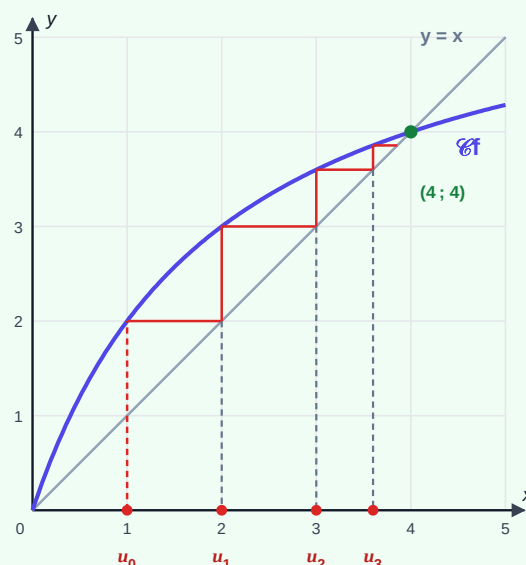
FICHE MÉTHODE — COMMENT ÉTUDIER UNE SUITE DÉFINIE PAR $u_{n+1} = f(u_n)$?

1. **Conjecturer** avec l'escalier : de u_0 sur l'axe, monter à la courbe, aller horizontalement à la droite $y = x$, redescendre sur l'axe : on obtient u_1 , et ainsi de suite.
2. **Démontrer par récurrence** un encadrement du type $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq b$, en appliquant f , **croissante sur $[a ; b]$** , qui conserve l'ordre.
3. **Conclure** par le théorème de convergence monotone ; si f est continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$: on résout et on garde la solution de $[a ; b]$.

Exemple : $f(x) = \frac{6x}{x+2}$ et $u_0 = 1$. On a $f'(x) = \frac{12}{(x+2)^2} >$

0 : f est croissante sur $[0 ; +\infty[$. Puis $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 =$

$3,6$ et $u_4 = \frac{27}{7} \approx 3,86$.



L'escalier de $u_0 = 1$: les termes montent vers l'abscisse du point d'intersection $(4 ; 4)$.

Récurrence. Soit $P(n)$: « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ». **Initialisation** : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, donc $1 \leq 1 \leq 2 \leq 4$. **Hérédité** : si $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$, comme f est croissante sur $[1 ; 4]$, $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$, soit $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$, et a fortiori $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout n .

Limite. (u_n) est croissante et majorée par 4 : elle converge vers un réel $\ell \in [1 ; 4]$. f est continue sur $[1 ; 4]$, donc $f(\ell) = \ell$: $6\ell = \ell(\ell + 2) \Leftrightarrow \ell^2 - 4\ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 4$. Comme $\ell \geq 1$, $\ell = 4$.

TRACE L'ESCALIER TOI-MÊME

Sur papier quadrillé, trace $y = x$, la courbe de f , puis l'escalier depuis $u_0 = 8$ (exercice 4) : les marches redescendent vers 4, et la figure te dit quel encadrement démontrer.

🕒 Calcul minute — 5 min chrono, sans calculatrice

1. $u_n = 2n + 5$: sens de variation ?
2. $u_n = -3n + 1$: sens de variation ?
3. $u_n = 0,5^n$: sens de variation ?
4. $u_n = (-2)^n$: sens de variation ?
5. Un majorant de $\frac{1}{n+1}$:
6. Croissante et majorée $\Rightarrow$
7. Décroissante et non minorée $\Rightarrow$
8. $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$: seule limite possible $\ell =$
9. $u_{n+1} = u_n^2$: limites possibles :
10. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{6u_n}{u_n + 2}$: $u_1 =$

Essai 1 : / 10 en min · Essai 2, deux jours plus tard : / 10 en min

Exercices

Exercice 1 — Sens de variation ★

Choisir l'outil adapté à chaque suite.

- a. $a_n = n^2 - 4n$: calcule $a_{n+1} - a_n$. À partir de quel rang la suite est-elle croissante ?
- b. $b_n = 3 \times 0,9^n$: compare $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ à 1.
- c. $c_n = \frac{n}{n+1}$: montre que $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et conclus.

Exercice 2 — Vrai ou faux ? Justifie. ★★

Un contre-exemple suffit pour « faux » ; « vrai » demande un théorème.

- a. Une suite croissante tend vers $+\infty$.
- b. Une suite croissante et majorée par 3 converge vers 3.
- c. Une suite décroissante et minorée par 0 converge.
- d. Une suite convergente est monotone.
- e. Une suite qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 3 — Une suite arithmético-géométrique ★★

Réurrence, convergence monotone, puis suite auxiliaire.

$u_0 = 0$ et, pour tout n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.

- a. Démontre par récurrence que, pour tout n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 5$.
- b. Déduis-en que (u_n) converge, et détermine sa limite ℓ .
- c. Montre que $v_n = u_n - 5$ définit une suite géométrique de raison 0,8 ; exprime u_n en fonction de n .

Exercice 4 — L'escalier qui redescend ★★★

Reprendre la fiche méthode avec un autre premier terme.

Même f que dans la fiche méthode, mais $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Calcule u_1 et u_2 (valeurs exactes).
- b. Démontre par récurrence que, pour tout n , $4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 8$.
- c. Déduis-en que (u_n) converge et détermine sa limite.

JE SAIS FAIRE — COCHE QUAND C'EST ACQUIS

- ☐ étudier le sens de variation d'une suite par $u_{n+1} - u_n$ ou par $\frac{u_{n+1}}{u_n}$;
- ☐ citer le théorème de convergence monotone, avec ses hypothèses ;
- ☐ étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$: escalier, récurrence, limite par $f(\ell) = \ell$.

Pour aller plus loin : la fiche « Suites numériques » sur progressschool.fr/reviser/maths/1ere/suites-numeriques (rappels de 1re)

4 Séance 4 — Rappels de dérivation

Objectif : dériver sans hésiter, écrire une tangente et dresser un tableau de variations justifié.

$f(x)$	$f'(x)$	Validité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \geq 1$ entier)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$

OPÉRATIONS

$$(u + v)' = u' + v' ; (ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} ; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ (là où } v \neq 0)$$

Composée affine : $x \mapsto f(ax + b)$ a pour dérivée $x \mapsto a f'(ax + b)$.

COMPOSÉES AFFINES

$$g(x) = (2x - 1)^5 : g'(x) = 2 \times 5(2x - 1)^4 = 10(2x - 1)^4.$$

$$h(x) = \sqrt{3x + 6} \text{ sur }]-2 ; +\infty[: h'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x + 6}} = \frac{3}{2\sqrt{3x + 6}}.$$

TANGENTE ET VARIATIONS

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Si $f' \geq 0$ sur un intervalle I , f est croissante sur I ; si $f' \leq 0$, décroissante. Si $f' > 0$ sauf en des points isolés, f est strictement croissante.

FICHE MÉTHODE — COMMENT DRESSER UN TABLEAU DE VARIATIONS ?

1. Calculer $f'(x)$ et la factoriser le plus possible.
2. Étudier le signe de $f'(x)$: racines, signe de chaque facteur, règle des signes.
3. En déduire les variations (une flèche par intervalle), puis calculer les valeurs aux bornes et aux extremums.

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-2 ; 3]$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, positif à l'extérieur des racines -1 et 1 .
 $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $f(3) = 19$.

Tangente en 2 : $f(2) = 3$, $f'(2) = 9$, d'où $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15$.

x	-2	-1	1	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-1	3	-1	19	

Le tableau de variations de f sur $[-2 ; 3]$.

TROIS PIÈGES

$(uv)' \neq u'v'$: la dérivée d'un produit a deux termes.

Oublier le facteur a : la dérivée de $(2x - 1)^5$ n'est pas $5(2x - 1)^4$.

Mélanger les lignes : la ligne du milieu donne le **signe de f'** , la dernière les **variations de f** ; on n'y écrit jamais « + » ou « - ».

AVANT DE DÉRIVER, NOMME LA FORME

Écris au brouillon : « somme », « produit », « quotient » ou « composée $f(ax + b)$ », puis u , v , u' , v' en colonne. Ce réflexe évite la plupart des erreurs.

Calcul minute — 5 min chrono, sans calculatrice

1. $(x^5)' = \dots\dots\dots$

2. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots\dots\dots$

3. $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$

4. $(3x^2 - 4x + 7)' = \dots\dots\dots$

5. $((2x + 1)^3)' = \dots\dots\dots$

6. $\left(\frac{1}{x + 2}\right)' = \dots\dots\dots$

7. $f(x) = x^2$: tangente en 1 : $\dots\dots\dots$

8. $2x - 6$ s'annule en $x = \dots\dots\dots$

9. $f(x) = x^2 - 6x$ est décroissante sur $\dots\dots\dots$

10. $(\sqrt{2x + 1})' = \dots\dots\dots$

Essai 1 : / 10 en min · Essai 2, deux jours plus tard : / 10 en min

Exercices

Exercice 1 — Dériver ★

Nommer la forme, puis appliquer la formule.

Calcule la dérivée de chaque fonction, sur l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ sur $\mathbb{R}$

d. $k(x) = (1 - 2x)^4$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ (réduis au même dénominateur)

e. $m(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

c. $h(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ sur $] -2 ; +\infty[$

Exercice 2 — Tangentes ★★

Appliquer la formule, puis la retourner.

Soit $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ sur $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; +\infty[$.

a. Montre que $f'(x) = \frac{3}{(x + 1)^2}$ et donne la tangente au point d'abscisse 0.

b. Donne la tangente au point d'abscisse 2.

c. En quels points la tangente est-elle parallèle à la droite $y = 3x$? Donne leurs équations.

Exercice 3 — Un tableau de variations ★★

La fiche méthode, appliquée.

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $[0 ; 4]$.

a. Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.

b. Dresse le tableau de variations de f sur $[0 ; 4]$.

c. Donne le maximum et le minimum de f sur $[0 ; 4]$, et où ils sont atteints.

Exercice 4 — La boîte de volume maximal ★★★

Modéliser, dériver, conclure.

Dans un carré de carton de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x cm, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

a. Justifie que $x \in]0 ; 6[$ et que le volume vaut $V(x) = x(12 - 2x)^2$.

b. Montre que $V'(x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$.

c. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Que vaut-il ?

JE SAIS FAIRE — COCHE QUAND C'EST ACQUIS

- ☐ dériver une somme, un produit, un quotient et une fonction $x \mapsto f(ax + b)$;
- ☐ écrire l'équation d'une tangente ;
- ☐ dresser un tableau de variations justifié par le signe de f' .

Pour aller plus loin : la fiche « Dérivation avancée » sur progressschool.fr/reviser/maths/terminale/derivees-avancees-terminale

5 Séance 5 — La fonction exponentielle

Objectif : calculer avec les puissances de e , résoudre équations et inéquations, dériver e^u .

DÉFINITION

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. C'est la fonction **exponentielle**, notée $\exp$. On note $e = \exp(1) \approx 2,718$ et $\exp(x) = e^x$.

RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a, b et tout entier n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b ; e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} ; (e^a)^n = e^{na}.$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$.

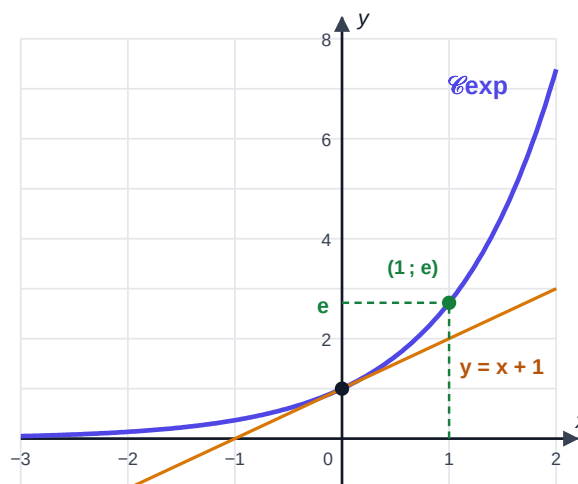
VARIATIONS ET CONSÉQUENCES

$\exp' = \exp > 0$: $\exp$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \text{ et } e^a < e^b \Leftrightarrow a < b.$$

Tangente en 0 : $y = x + 1$.



La courbe de $\exp$, sa tangente en 0 et le point $(1; e)$.

LIMITES ET CROISSANCES COMPARÉES

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

« L'exponentielle l'emporte sur x . »

DÉRIVÉE DE e^u

Si u est dérivable sur I , $x \mapsto e^{u(x)}$ l'est aussi et $(e^u)' = u'e^u$. En particulier, $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$; $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.

EXEMPLE RÉDIGÉ

$f(x) = (x-1)e^x$. Produit : $f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = xe^x$. Comme $e^x > 0$, $f(x)$ a le signe de x : f est décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$, de minimum $f(0) = -1$.

FICHE MÉTHODE — COMMENT RÉSOUDRE UNE ÉQUATION OU UNE INÉQUATION AVEC DES EXPONENTIELLES ?

1. **Tout écrire sous la forme $e^A = e^B$** (ou $e^A < e^B$), avec les règles de calcul.
2. **Passer aux exposants** : $A = B$ (ou $A < B$), en citant la stricte croissance de $\exp$, qui conserve le sens.
3. **Résoudre** l'équation ou l'inéquation obtenue, et conclure par un ensemble S .

Exemple : $e^{2x+1} \leq e^{3-x} \Leftrightarrow 2x+1 \leq 3-x$ ($\exp$ est strictement croissante) $\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$. $S =]-\infty; \frac{2}{3}]$.

TROIS PIÈGES

$e^a + e^b \neq e^{a+b}$: la règle concerne le **produit**. Par exemple $e + e = 2e \approx 5,4$, alors que $e^2 \approx 7,39$.
 $(e^x)^2 = e^{2x}$, et non e^{x^2} .
 $e^x = 0$ ou $e^x = -1$ n'ont **aucune solution** : une exponentielle est toujours strictement positive.

LE CHANGEMENT DE VARIABLE

Quand e^{2x} et e^x apparaissent dans la même équation, pose $X = e^x$ (avec $X > 0$) : $e^{2x} = X^2$. Tu retrouves une équation du second degré, puis tu reviens à x . Essaie-le sur l'exercice 2 d).

🕒 Calcul minute — 5 min chrono, sans calculatrice

1. $e^0 =$

2. $e^3 \times e^{-1} =$

3. $(e^2)^3 =$

4. $\frac{e^5}{e^2} =$

5. $\frac{1}{e^{-4}} =$

6. $e^{x+1} \times e^{-x} =$

7. $(e^{3x})' =$

8. $(e^{-x^2})' =$

9. $e^{2x} = e^6 \Leftrightarrow x =$

10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$

Essai 1 : / 10 en min · Essai 2, deux jours plus tard : / 10 en min

Exercices

Exercice 1 — Simplifier ★

Une seule exponentielle à la fin, quand c'est possible.

Écris le plus simplement possible :

a. $A = \frac{e^3 \times e^{-5}}{e^{-2}}$

b. $B = (e^x)^2 \times e^{-2x+1}$

c. $C = (e^x + e^{-x})^2$

d. $D = \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}}$

Exercice 2 — Équations et inéquations ★★

La fiche méthode, puis le changement de variable.

Résous dans $\mathbb{R}$:

a. $e^{3x-2} = e^{x+4}$

b. $e^{x^2} = e^{5x-6}$

c. $e^{1-2x} > 1$

d. $e^{2x} - (e + 1)e^x + e = 0$ (pose $X = e^x$)

e. $(x^2 - 4)e^x \leq 0$

Exercice 3 — Dériver et étudier ★★★

Produit, puis e^u ; le signe de e^u ne pose jamais de problème.

a. $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$: montre que $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$, puis dresse le tableau de variations de f (sans les limites).
Donne la valeur exacte du maximum, puis une valeur approchée au centième.

b. $g(x) = e^{x^2 - 2x}$ sur $\mathbb{R}$: calcule $g'(x)$, étudie son signe et donne le minimum de g (valeur exacte, puis approchée au centième).

Exercice 4 — Limites et croissances comparées ★★★★

Factoriser pour faire apparaître une limite de référence.

Détermine :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$ (écris $e^x - x = x(\frac{e^x}{x} - 1)$)

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)e^x$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x + 1}{e^x + 2}$

JE SAIS FAIRE — COCHE QUAND C'EST ACQUIS

- ☐ utiliser les règles de calcul sur les exponentielles ;
- ☐ résoudre $e^A = e^B$ et $e^A < e^B$ en citant la stricte croissance ;
- ☐ dériver e^u et utiliser $e^x > 0$ pour étudier un signe.

6 Séance 6 — Limites de fonctions

Objectif : calculer une limite en l'infini ou en un réel, et en déduire les asymptotes de la courbe.

EN L'INFINI

Mêmes limites de référence et mêmes opérations que pour les suites, avec $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

En $-\infty$: $x^n \rightarrow +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\frac{1}{x^n} \rightarrow$

0.

Un polynôme ou un quotient de polynômes : on factorise par les **termes de plus haut degré**.

EN UN RÉEL

$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Pour $\frac{\ell}{0}$ avec $\ell \neq 0$, la limite est infinie : son signe dépend du signe du dénominateur **de chaque côté** de a .

ASYMPTOTES

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ou en $-\infty$), la droite $y = \ell$ est asymptote **horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

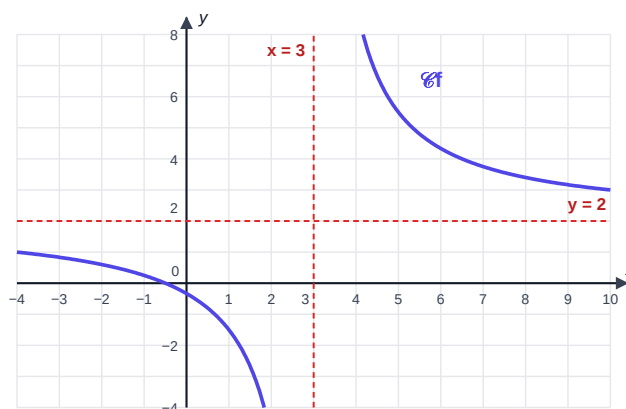
Si la limite de f en a (à gauche ou à droite) est infinie, la droite $x = a$ est asymptote **verticale** à $\mathcal{C}_f$.

EXEMPLE RÉDIGÉ

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{3\}. \text{ En } \pm\infty : f(x) = \frac{x(2 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} \rightarrow$$

2 : $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

En 3 : $2x+1 \rightarrow 7$ et $x-3 \rightarrow 0$, positif si $x > 3$, négatif si $x < 3$. Donc $f(x) \rightarrow +\infty$ à droite de 3 et $-\infty$ à gauche : $x = 3$ est asymptote verticale.



La courbe de f et ses deux asymptotes, en pointillés.

FICHE MÉTHODE — COMMENT TROUVER LES ASYMPTOTES D'UNE COURBE ?

1. **En $\pm\infty$** : calculer la limite (terme dominant). Une limite finie ℓ donne l'asymptote horizontale $y = \ell$.
2. **En chaque valeur interdite a** : limite du numérateur (non nulle), signe du dénominateur à gauche et à droite de a (tableau de signes). Une limite infinie donne l'asymptote verticale $x = a$.
3. **Conclure par des phrases** : « la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ ».

Forme $\frac{0}{0}$ en un réel : on factorise par $(x - a)$. Exemple : $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$ pour $x \neq 2$, donc la limite en 2 vaut 4 : pas d'asymptote.

TROIS PIÈGES

Le terme dominant ne sert qu'en l'infini ; en un réel a , on factorise par $(x - a)$.

« $\frac{7}{0} = +\infty$ » **sans regarder le signe** : à gauche de 3, $\frac{7}{0} \rightarrow -\infty$.

Un polynôme en $-\infty$: $x^3 + 5x^2 = x^3(1 + \frac{5}{x}) \rightarrow -\infty$, et non $+\infty$: x^3 est négatif quand $x \rightarrow -\infty$.

LE TABLEAU DE SIGNES DU DÉNOMINATEUR

Pour une limite « $\frac{\ell}{0}$ », dessine le tableau de signes du dénominateur autour de a : chaque case te dit 0^- ou 0^+ .

🕒 Calcul minute — 5 min chrono, sans calculatrice

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \dots\dots\dots$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \dots\dots\dots$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \dots\dots\dots$

4. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$

5. $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right) = \dots\dots\dots$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = \dots\dots\dots$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x + 5} = \dots\dots\dots$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \dots\dots\dots$

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \dots\dots\dots$

Essai 1 : / 10 en min · Essai 2, deux jours plus tard : / 10 en min

Exercices

Exercice 1 — Sans forme indéterminée ★

Nommer les limites, appliquer les opérations.

Détermine :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x - 1)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 5 + \frac{1}{x})$

c. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (3 + \frac{1}{x})$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - \frac{1}{\sqrt{x}})$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 1}$

Exercice 2 — Lever une forme indéterminée ★★

Terme dominant en l'infini, facteur $(x - a)$ en un réel.

Détermine :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5x^2)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{1 - x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 4}$

d. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

Exercice 3 — Deux asymptotes ★★

La fiche méthode, appliquée.

Soit $g(x) = \frac{-x + 4}{x + 2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Détermine les limites de g en $+\infty$, en $-\infty$, puis à gauche et à droite de -2 . Interprète graphiquement chaque résultat.

Exercice 4 — Trois asymptotes et une position ★★★

Deux valeurs interdites, un tableau de signes, une différence.

Soit $h(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$.

a. Donne l'ensemble de définition de h .

b. Détermine les limites de h en $\pm\infty$; interprète.

c. Détermine les limites de h à gauche et à droite de 1, puis de -1 ; interprète.

d. Montre que $h(x) - 2 = \frac{5}{x^2 - 1}$ et déduis-en la position de $\mathcal{C}_h$ par rapport à son asymptote horizontale.

JE SAIS FAIRE — COCHE QUAND C'EST ACQUIS

- ☐ calculer une limite en l'infini en factorisant par le terme dominant ;
- ☐ calculer une limite infinie en un réel, à gauche et à droite, par le signe du dénominateur ;
- ☐ en déduire les asymptotes horizontales et verticales, avec une phrase.

Pour aller plus loin : la fiche « Limites de fonctions et continuité » sur progressschool.fr/reviser/maths/terminale/limites-continue

Test de rentrée — 20 minutes, sans calculatrice

Fais-le le dernier jour, d'une traite. Chaque question renvoie à une séance : si tu te trompes, refais les exercices ★★ de cette séance. Rédige comme sur une copie : la justification compte autant que le résultat.

N°	Question	Séance
1	Démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \geq 3n + 1$.	1
2	$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Démontre par récurrence que $u_n = 2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	1
3	Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - n}{n^2 + 3}$.	2
4	Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \times 0,9^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3)$.	2
5	$u_n = \frac{n}{n+2}$: montre que (u_n) est croissante et majorée par 1. Que peux-tu en conclure ?	3
6	On admet que la suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$ converge. Quelle est sa limite ? Justifie.	3
7	Dérive $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ sur $]2; +\infty[$; donne $f'(x)$ sous forme d'un seul quotient.	4
8	Donne l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto x^3 - 2x$ au point d'abscisse 1.	4
9	Résous $e^{2x-1} \geq e^{x+2}$, puis dérive $x \mapsto xe^{-x}$.	5
10	Donne les asymptotes de la courbe de $x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 1}$, en justifiant.	6

MON RÉSULTAT

- ☐ 10 sur 10 : tu es prêt pour la suite de l'année.
- ☐ 7 à 9 : refais les séances des questions manquées.
- ☐ moins de 7 : reprends les séances concernées dans l'ordre, une par jour.