

Dérivation — Nombre dérivé et fonctions dérivées

Mathématiques · Première
Contrôle n°1 · 60 min · sur 20

Exercice 1 — Taux de variation et nombre dérivé

4 pts 11 min

Définir le nombre dérivé

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Un quotient mesure une pente sur un intervalle. Quand l'intervalle se réduit à rien, la sécante bascule et le quotient tend vers un nombre qui change tout.

1. Écris le taux de variation de f entre a et $a + h$. (1 pt)

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

→ C'est le coefficient directeur de la sécante joignant les deux points.

2. S'agit-il d'une pente en un point ? (1 pt)

Non : c'est une pente moyenne sur un intervalle.

→ La distinction entre un point et un intervalle commande tout le reste.

3. Que devient ce taux lorsque h tend vers 0 ? (1 pt)

Il tend vers le nombre dérivé $f'(a)$.

→ La sécante bascule alors vers la tangente.

4. Que représente géométriquement $f'(a)$? (1 pt)

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

→ C'est une vitesse instantanée, et non plus moyenne.

Exercice 2 — La tangente

4 pts 11 min

Déterminer l'équation d'une tangente

On travaille avec $f(x) = x^2$, au point d'abscisse 2.

LA RÈGLE DU COURS

Une équation, deux ingrédients, et il les faut tous les deux. En oublier un produit une droite parallèle à celle qu'on cherchait, ce qui ne vaut aucun point.

1. Écris l'équation générale de la tangente au point d'abscisse a . (1 pt)

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

→ $f'(a)$ donne la pente, $f(a)$ ancre la droite au bon point.

2. Calcule $f'(2)$. (1 pt)

$$f'(x) = 2x, \text{ donc } f'(2) = 4.$$

→ C'est la pente de la tangente cherchée.

3. Calcule $f(2)$. (1 pt)

$$2^2 = 4$$

→ C'est l'ordonnée du point de contact.

4. Donne l'équation réduite de la tangente. (1 pt)

$$y = 4x - 4$$

→ En développant $4(x - 2) + 4$, la constante vaut -4 .

Exercice 3 — Calculer une dérivée

5 pts 14 min

Appliquer les règles de dérivation

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Quatre règles gouvernent les opérations, et deux d'entre elles ne font pas ce qu'on attend. Dans l'une, l'ordre des termes décide du signe du résultat.

1. Comment se dérive une somme, et un produit par une constante ? (1 pt)

$$(f + g)' = f' + g' \text{ et } (kf)' = kf'.$$

→ Ce sont les deux règles qui se comportent comme on l'attend.

2. Écris la règle du produit. (1 pt)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

→ La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

3. Écris la règle du quotient. (1 pt)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

→ L'ordre du numérateur compte : l'inverser change le signe du résultat.

4. Dérive $f(x) = x^2(3x + 1)$ en développant d'abord. (1 pt)

$$f(x) = 3x^3 + x^2, \text{ donc } f'(x) = 9x^2 + 2x.$$

→ Développer avant de dériver est plus court et moins risqué.

5. Pourquoi $f'(x) = 6x$ est-il faux pour cette fonction ? (1 pt)

Parce que ce serait le produit des dérivées, qui n'est pas la dérivée du produit.

→ Le développement le montre immédiatement.

Exercice 4 — Variations et extrémums

4 pts 14 min

Étudier les variations par la dérivée

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Un théorème relie le signe de la dérivée aux variations de la fonction, et c'est lui qui donne son intérêt au chapitre. Un autre point demande plus que l'annulation de la dérivée.

1. Que conclut-on du signe de f' sur un intervalle ? (1 pt)

f est strictement croissante si $f' > 0$, strictement décroissante si $f' < 0$, constante si f' est nulle partout.

→ Étudier les variations revient donc à étudier un signe.

2. Pourquoi faut-il factoriser f' avant d'en chercher le signe ? (1 pt)

Parce qu'on ne peut étudier le signe que d'un produit ou d'un quotient, jamais d'une somme.

→ Réduire au même dénominateur joue le même rôle.

3. Avec quelle fonction remplit-on les valeurs d'un tableau de variations ? (1 pt)

Avec f , jamais avec f' .

→ C'est une confusion fréquente en fin de tableau.

4. La dérivée de $x \mapsto x^3$ s'annule en 0. Y a-t-il un extrémum ? (1 pt)

Non : la fonction reste strictement croissante.

→ Sa dérivée $3x^2$ est positive de part et d'autre : il n'y a pas de changement de signe.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Un produit dérivé terme à terme. Un extrémum conclu trop vite. Et une tangente mal ancrée.

1. « $(fg)' = f'g'$ » (1 pt)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

→ Il faut deux termes, chacun dérivant l'un des deux facteurs.

2. « La dérivée s'annule en ce point : il y a donc un extrémum. » (1 pt)

Il faut que la dérivée change de signe.

→ Une dérivée peut s'annuler sans changer de signe, et la fonction reste alors monotone.

3. « J'ai calculé la pente $f'(a)$, l'équation de la tangente est donc $y = f'(a)x$. » (1 pt)

$$\text{C'est } y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

→ Sans le point d'ancrage, on obtient une parallèle à la tangente.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	Du taux de variation au nombre dérivé	4 points — 1 par question	Une pente moyenne présentée comme une pente en un point.
Ex.2	L'équation de la tangente	4 points — 1 par question	Une tangente avec la bonne pente et la mauvaise ordonnée.
Ex.3	Les règles de dérivation	5 points — 1 par question	Un produit dérivé terme à terme.
Ex.4	Dérivée et sens de variation	4 points — 1 par question	Un tableau de variations rempli avec les valeurs de la dérivée.
Ex.5	L'erreur repérée, et le calcul juste donné	3 points — 1 par ligne	Un extrémum conclu de la seule annulation de la dérivée.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant sur l'étude complète : ensemble de définition, dérivée factorisée, signe, tableau — et les valeurs de f aux bornes, jamais celles de f' .

10 à 15

Refais l'exercice 3 en posant u , v , u' et v' sur une ligne à part avant d'appliquer la formule. Quand c'est possible, développe d'abord : c'est plus court et moins risqué.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et retiens l'image qui l'ouvre : la dérivée, c'est le compteur de vitesse, quand la fonction est le compteur kilométrique.