

Fonctions trigonométriques — sin, cos et tan

Exercice 1 — Le cercle et ses lectures

5 pts 13 min

Lire les propriétés sur le cercle trigonométrique

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

On enroule la droite des réels autour d'un cercle, et trois propriétés se lisent alors directement sur la figure. Elles évitent presque tous les calculs.

1. Comment $\cos x$ et $\sin x$ se définissent-ils pour un réel x quelconque ? (1 pt)**En enroulant la droite des réels sur le cercle de rayon 1 : $\cos x$ est l'abscisse du point image, $\sin x$ son ordonnée.**

→ Cette définition vaut pour tout réel, et plus seulement pour un angle aigu.

2. Écris l'identité fondamentale et dis d'où elle vient. (1 pt)

 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, par le théorème de Pythagore appliqué au rayon.

→ Elle est vraie pour tout réel, sans exception.

3. Qu'est-ce que la périodicité, et quelle en est la période ? (1 pt)

Ajouter un tour complet ramène au même point : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.→ La période est donc 2π , et il suffit d'étudier un intervalle de cette longueur.

4. Laquelle des deux fonctions est paire, et laquelle impaire ? (1 pt)

Le cosinus est pair, le sinus est impair.→ $-x$ est le symétrique de x par rapport à l'axe des abscisses.5. Combien de solutions a l'équation $\cos x = 2$? (1 pt)**Aucune : un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 .**

→ Le dire suffit à résoudre l'équation.

Exercice 2 — Les formules d'addition

4 pts 12 min

Employer les formules d'addition

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Ni le cosinus ni le sinus ne se distribuent sur une somme. Deux formules les remplacent, et un seul détail les distingue : un signe qui s'inverse d'un côté et se conserve de l'autre.

1. Pourquoi $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$ est-il faux ? Donne un contre-exemple. (1 pt)**Avec $a = b = \frac{\pi}{2}$: le membre de gauche vaut $\cos \pi = -1$, le membre de droite vaut 0.**

→ Aucune fonction trigonométrique n'est linéaire.

2. Qu'est-ce qui distingue la formule du cosinus de celle du sinus ? (1 pt)

Le cosinus inverse le signe entre les deux produits ; le sinus le conserve.

→ C'est le seul détail à surveiller dans les deux formules.

3. Qu'obtient-on en posant $b = a$ dans ces formules ? (1 pt)**Les formules de duplication.**→ Elles donnent le cosinus et le sinus de $2a$.

4. Écris les deux formes utiles à la linéarisation. (1 pt)

 $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.

→ Elles abaissent un carré en un cosinus de degré un.

Exercice 3 — Une valeur exacte

4 pts 11 min

Calculer une valeur exacte par les formules d'addition

On cherche la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

LA RÈGLE DU COURS

Un angle qui n'est pas remarquable peut souvent s'écrire comme somme ou différence de deux angles qui le sont. Le reste n'est qu'un produit de valeurs connues.

1. Décompose $\frac{\pi}{12}$ en différence de deux angles remarquables. (1 pt)

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

→ Parce que $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

2. Quelle formule appliques-tu ? (1 pt)

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

→ C'est la formule de différence pour le cosinus.

3. Calcule le premier produit. (1 pt)

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

→ Avec $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Calcule le second produit. (1 pt)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

→ Parce que $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$.

Exercice 4 — Dérivées et équations

4 pts 14 min

Dériver et résoudre en trigonométrie

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Les deux fonctions se dérivent, et l'une des deux dérivées porte un signe qu'on oublie. Résoudre une équation trigonométrique demande, elle, de ne pas s'arrêter à la première solution trouvée.

1. Donne les dérivées du sinus et du cosinus. (1 pt)

$$(\sin x)' = \cos x \text{ et } (\cos x)' = -\sin x.$$

→ Le signe moins est la seule chose à ne pas oublier.

2. Pour résoudre $\cos x = a$, quelle est la toute première vérification ? (1 pt)

Vérifier que a appartient à $[-1; 1]$.

→ Sinon il n'y a aucune solution, et c'est la réponse complète.

3. Une solution α étant trouvée, quelle est la seconde du tour pour un cosinus ? Et pour un sinus ? (1 pt)

$-\alpha$ pour un cosinus, $\pi - \alpha$ pour un sinus.

→ C'est là que se perdent les points : une seule des deux est donnée.

4. Résous $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$. (1 pt)

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}.$$

→ La seconde solution $-\frac{\pi}{3}$ se ramène dans l'intervalle en ajoutant 2π .

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Un cosinus distribué sur une somme. Une dérivée sans son signe. Et une équation résolue à moitié.

1. « $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$ » (1 pt)

Il faut la formule d'addition, qui fait intervenir un produit croisé.

→ Un test en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ réfute l'égalité en trois secondes.2. « $(\cos x)' = \sin x$ » (1 pt) $(\cos x)' = -\sin x$

→ Le signe moins vient du sens de rotation, et c'est l'oubli le plus fréquent.

3. « $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: la seconde solution du tour est $-\frac{\pi}{4}$. » (1 pt)Pour un sinus, la seconde solution est $\pi - \alpha$, soit $\frac{3\pi}{4}$.→ C'est $-\alpha$ pour un cosinus, jamais pour un sinus : les deux symétries diffèrent.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	Le cercle et les trois propriétés	5 points — 1 par question	Une parité attribuée à la mauvaise fonction.
Ex.2	Les formules d'addition	4 points — 1 par question	Un cosinus distribué sur une somme.
Ex.3	Un calcul de valeur exacte	4 points — 1 par question	Un angle non décomposé en angles remarquables.
Ex.4	Dérivées et équations	4 points — 1 par question	Une seule des deux solutions du tour donnée.
Ex.5	L'erreur repérée, et le calcul juste donné	3 points — 1 par ligne	Le signe moins oublié dans la dérivée du cosinus.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant à la linéarisation : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ abaisse un carré en un cosinus de degré un, et c'est ce qui rend certaines intégrales calculables.

10 à 15

Refais l'exercice 4 en dessinant le cercle à chaque équation : la seconde solution du tour se lit sur la symétrie, et c'est là que se perd la moitié des points.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et retiens le réflexe de vérification : au moindre doute sur une formule, teste-la en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. Une formule fausse tombe en trois secondes.