

Probabilités — Loi binomiale

Mathématiques · Première
Contrôle n°1 · 60 min · sur 20

Exercice 1 — Bernoulli

4 pts 11 min

Reconnaître un schéma de Bernoulli

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Une expérience à deux issues, répétée un nombre fixé de fois. Deux conditions doivent tenir, et c'est leur oubli qui invalide le plus souvent un raisonnement juste par ailleurs.

1. Qu'est-ce qu'une épreuve de Bernoulli ? (1 pt)

Une expérience à deux issues seulement, appelées succès et échec.→ Le succès a une probabilité p , l'échec $1 - p$.

2. Dans un contrôle qualité, qu'appelle-t-on succès ? (1 pt)

La pièce défectueuse, puisque c'est elle qu'on compte.

→ Le mot n'a rien d'élogieux : c'est l'énoncé qui décide.

3. Quelles sont les deux conditions d'un schéma de Bernoulli ? (1 pt)

Les épreuves sont identiques et indépendantes.

→ Ce sont deux conditions à vérifier, pas à supposer.

4. Un tirage sans remise respecte-t-il ces conditions ? (1 pt)

Non : la composition change à chaque tirage.

→ Un tirage avec remise, lui, les respecte.

Exercice 2 — La loi binomiale

5 pts 14 min

Écrire et employer la loi binomiale

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Une variable compte les succès, et sa loi se calcule en multipliant la probabilité d'un chemin par le nombre de chemins. C'est ce second facteur qu'on oublie.

1. Que compte la variable X , et quelle loi suit-elle ? (1 pt)**Elle compte le nombre de succès, et suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.**→ Elle prend ses valeurs de 0 à n .2. Écris la formule donnant $P(X = k)$. (1 pt)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

→ C'est la probabilité d'un chemin, multipliée par le nombre de chemins.

3. Que représente le coefficient binomial ? (1 pt)

Le nombre de chemins de l'arbre comportant exactement k succès parmi n épreuves.

→ Il se lit sur le triangle de Pascal, ou se calcule à la calculatrice.

4. Que valent $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{1}$? (1 pt)**1 et n .**

→ Il n'y a qu'un seul chemin sans aucun succès.

5. Que vérifient toujours les deux exposants de la formule ? (1 pt)

Leur somme vaut n .

→ C'est un contrôle immédiat sur toute écriture.

Exercice 3 — Un calcul complet

4 pts 12 min

Calculer une probabilité binomiale

Un dé équilibré est lancé 5 fois. On cherche la probabilité d'obtenir exactement deux fois un 6.

LA RÈGLE DU COURS

Un dé, cinq lancers, une question sur un nombre exact de réussites. Tout le travail consiste à nommer le succès, puis à ne pas oublier le facteur qui compte les ordres possibles.

1. Nomme le succès et donne sa probabilité. (1 pt)

Le succès est « obtenir un 6 », de probabilité $\frac{1}{6}$.

→ C'est le premier geste : sans succès nommé, aucun calcul n'est possible.

2. Quelle loi suit X ? (1 pt)

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.

→ Les lancers sont identiques et indépendants.

3. Que vaut $\binom{5}{2}$? (1 pt)

10

→ Il y a dix façons de placer les deux 6 parmi cinq lancers.

4. Pourquoi écrire seulement $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$ serait-il faux ? (1 pt)

Parce que ce produit est la probabilité d'un seul chemin précis.

→ Oublier le coefficient divise la réponse par dix sans rien signaler.

Exercice 4 — Espérance et contraire

4 pts 13 min

Calculer une espérance et employer le contraire

Une chaîne produit 2 % de pièces défectueuses ; on prélève 20 pièces dans une production très nombreuse.

LA RÈGLE DU COURS

Une moyenne se calcule en une multiplication, et son résultat n'a aucune raison d'être entier. Une question courante, elle, se traite bien plus vite par le complément.

1. Quelle est l'espérance d'une variable suivant $\mathcal{B}(n; p)$? (1 pt)

$E(X) = np$

→ C'est le nombre moyen de succès sur un très grand nombre de répétitions.

2. Calcule l'espérance ici, et interprète-la. (1 pt)

$20 \times 0,02 = 0,4$: en moyenne, 0,4 pièce défectueuse par lot.

→ Le résultat n'a aucune raison d'être entier.

3. Comment traduit-on « au moins une pièce défectueuse » ? (1 pt)

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

→ Passer par le contraire évite d'additionner vingt termes.

4. Pourquoi peut-on assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise ? (1 pt)

Parce que la production est très nombreuse : retirer 20 pièces ne change pas la proportion.

→ C'est ce qui rend les épreuves identiques et indépendantes.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Le coefficient oublié. Un tirage sans remise traité comme s'il l'était avec. Et une espérance arrondie de force.

1. « $P(X = 3) = p^3(1 - p)^{n-3}$ » (1 pt)Il manque le coefficient $\binom{n}{3}$ devant.

→ Le produit seul ne donne la probabilité que d'un chemin précis.

2. « On tire 5 boules sans remise dans une urne de 10 : X suit une loi binomiale. » (1 pt)

Les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes : la loi ne s'applique pas.

→ La composition de l'urne change à chaque tirage.

3. « L'espérance vaut 0,4 pièce, donc on arrondit à 0 pièce défectueuse. » (1 pt)

L'espérance n'a pas à être entière : elle vaut 0,4 en moyenne par lot.

→ C'est une moyenne sur beaucoup de lots, pas une prévision pour un lot.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	L'épreuve et le schéma de Bernoulli	4 points — 1 par question	Les deux conditions supposées au lieu d'être vérifiées.
Ex.2	La loi binomiale et son coefficient	5 points — 1 par question	Le coefficient binomial oublié devant les puissances.
Ex.3	Un calcul mené jusqu'au bout	4 points — 1 par question	Des exposants qui ne totalisent pas n .
Ex.4	Espérance et événement contraire	4 points — 1 par question	Une espérance arrondie à l'entier parce qu'elle compte des objets.
Ex.5	L'erreur repérée, et la réponse juste donnée	3 points — 1 par ligne	Un tirage sans remise traité comme un schéma de Bernoulli.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant à traduire les énoncés : « exactement k » donne $P(X = k)$, « au plus k » donne $P(X \leq k)$, « au moins un » donne $1 - P(X = 0)$. La traduction vaut souvent plus de points que le calcul.

10 à 15

Refais l'exercice 2 en te demandant à chaque fois si l'ordre est imposé. S'il ne l'est pas, il y a un coefficient — toujours.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et prends l'habitude d'écrire la phrase complète : « X suit la loi binomiale de paramètres n et p ». Elle est notée en elle-même.