



NIVEAU 3 SUR 3

Approfondi

Corriger, prouver, réfuter, modéliser : le chapitre sans aide.

Sans aucune aide · 60 minutes · sur 20

Généralités sur les fonctions

Corrigé du contrôle **niveau 3 · Approfondi**, avec le barème au point près.

RAPPEL

La règle du cours que l'exercice met à l'épreuve, en tête de chaque exercice.

✓ RÉPONSE

Dans le cadre bordé : ce qui rapporte les points.

→ POURQUOI

Sous chaque réponse : la raison, pour comprendre et non recopier.

1

Trouve l'erreur

Ⓢ Repérer une erreur et la corriger · Rédiger une justification

⌚ 12 min

4 pts

RAPPEL DE COURS



Un domaine s'obtient en cherchant où le dénominateur s'annule vraiment. Une égalité en un seul nombre ne prouve pas la parité. Un maximum est une valeur de la fonction. Une équation $x^2 = a$, avec $a > 0$, a deux solutions.

LA COPIE ANNOTÉE

- On étudie la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$.
- Le dénominateur s'annule pour $x = 2$ et $x = -2$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
- On calcule $f(1) = \frac{3}{5}$ et $f(-1) = \frac{3}{5}$.
- Comme $f(-1) = f(1)$, la fonction f est paire.
- On admet que f est croissante sur $[-3; 0]$ et décroissante sur $[0; 3]$.
- Le maximum de f sur $[-3; 3]$ est donc 0.
- On résout $f(x) = \frac{1}{2}$: $x^2 + 4 = 6$, donc $x^2 = 2$.
- L'unique antécédent de $\frac{1}{2}$ est donc la racine carrée de 2.

⚠ erreur 1

⚠ erreur 2

⚠ erreur 3

⚠ erreur 4

CRITÈRE	CE QUI EST ATTENDU	POINTS
Ligne 2 — le domaine de définition.	$x^2 + 4$ ne s'annule jamais : $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 4 \geq 4$. Aucune valeur n'est interdite : $D_f = \mathbb{R}$. → L'élève a confondu avec $x^2 - 4$, qui s'annule bien en 2 et en -2. On vérifie : $2^2 + 4$ vaut 8, pas 0.	1 pt
Ligne 4 — une conclusion tirée d'un seul exemple.	L'égalité $f(-1) = f(1)$ ne dit rien des autres nombres. Il faut montrer que, pour tout réel x , $f(-x) = \frac{3}{(-x)^2 + 4} = \frac{3}{x^2 + 4} = f(x)$: f est bien paire, mais pour cette raison. → Un contre-exemple suffit à écarter la parité ; un exemple ne suffit jamais à l'établir : il faut l'égalité pour tout x du domaine.	1 pt
Ligne 6 — une abscisse confondue avec une valeur de f.	La plus grande valeur de f sur $[-3; 3]$ est $f(0) = \frac{3}{4}$; le nombre 0 indique seulement où elle se trouve. → 0 est l'abscisse du sommet, pas le maximum ; la phrase « le maximum vaut ..., atteint en ... » évite la confusion.	1 pt
Ligne 8 — un antécédent oublié.	$x^2 = 2$ a deux solutions : les antécédents de $\frac{1}{2}$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. → $(-\sqrt{2})^2 = 2$ aussi. La parité de f l'annonçait : $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$.	1 pt

⚠ CE QUI COÛTE DES POINTS

Une erreur repérée sans la réponse juste : 0,5 sur 1.

Barème : 4 points — 1 par erreur : 0,5 pour la repérer, 0,5 pour la corriger.

🔍 ERREURS FRÉQUENTES

- Corriger la ligne 4 en écrivant « f n'est pas paire » : la conclusion est juste, c'est la preuve qui manque.
- Repérer l'oubli de la ligne 8 sans donner le second antécédent.

2

Vrai ou faux ? Prouver ou réfuter

🕒 Prouver ou réfuter · Rédiger une justification

🕒 13 min

5 pts

RAPPEL DE COURS



Une affirmation générale se prouve pour tous les cas ; elle se réfute par un seul contre-exemple. Une fonction associe à chaque nombre une seule image. Croissante : l'ordre est conservé pour tous les couples $a < b$ de l'intervalle. Le maximum est la plus grande valeur prise par la fonction.

a « Le cercle de centre O et de rayon 2 est le graphique d'une fonction. »

1 pt

✓ **Faux : $(0; 2)$ et $(0; -2)$ appartiennent tous deux au cercle ; l'abscisse 0 correspondrait à deux ordonnées différentes.**

→ **Pourquoi.** Une fonction associe à chaque nombre une seule image : son graphique ne passe jamais deux fois au-dessus d'un même point de l'axe horizontal.

b « Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x , alors $f(0) = 0$. »

1 pt

✓ **Vrai : avec $x = 0$, l'égalité $f(-x) = -f(x)$ donne $f(0) = -f(0)$, donc $2f(0) = 0$ et $f(0) = 0$.**

→ **Pourquoi.** $-0 = 0$: on applique la définition au seul nombre qui est son propre opposé. La courbe d'une fonction impaire définie en 0 passe donc par l'origine.

c « Si $f(1) < f(4)$, alors f est croissante sur $[1; 4]$. »

1 pt

✓ **Faux. Contre-exemple : $f(x) = (x - 2)^2$ vérifie $f(1) = 1 < f(4) = 4$, mais $1 < 2$ et $f(1) > f(2) = 0$.**

→ **Pourquoi.** Être croissante, c'est conserver l'ordre pour tous les couples $a < b$ de l'intervalle, pas seulement pour ses extrémités : la courbe peut descendre puis remonter.

d « Sur $[-3; 5]$, le maximum de f vaut 4 ; l'équation $f(x) = 5$ n'a donc aucune solution sur cet intervalle. »

1 pt

✓ **Vrai : pour tout x de $[-3; 5]$, $f(x) \leq 4$, donc $f(x) \neq 5$.**

→ **Pourquoi.** Aucune image ne dépasse le maximum : la droite d'ordonnée 5 passe au-dessus de toute la courbe.

e « Si f est croissante sur $[-2; 0]$ et sur $[0; 3]$, avec $f(-2) = 1$, alors $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur $[-2; 3]$. »

1 pt

✓ **Vrai : pour x dans $[-2; 0]$, $f(x) \geq f(-2) = 1$; pour x dans $[0; 3]$, $f(x) \geq f(0) \geq 1$. La valeur 0 n'est jamais atteinte.**

→ **Pourquoi.** Une fonction qui ne fait que monter atteint sa plus petite valeur à la borne de gauche : ici 1, qui est supérieur à 0.

⚠ CE QUI COÛTE DES POINTS

« Faux » sans contre-exemple chiffré : 0,5 sur 1.

Barème : 5 points — 1 par affirmation : 0,5 pour vrai ou faux, 0,5 pour la justification.

🔍 ERREURS FRÉQUENTES

- Réfuter par une phrase générale (« ce n'est pas toujours vrai ») au lieu d'un contre-exemple chiffré.
- Pour l'affirmation c, ne regarder que les deux extrémités de l'intervalle.
- Pour l'affirmation b, vérifier sur une fonction particulière au lieu d'utiliser la définition.

RAPPEL DE COURS



Modéliser, c'est exprimer la grandeur étudiée en fonction de x , puis fixer le domaine que la situation impose. Le tableau de variations, lu sur la courbe, permet de conjecturer un maximum et de compter les solutions d'une équation ; une conjecture se formule en une phrase, avec la valeur atteinte et l'endroit où elle l'est.

a Justifie que $V(x) = x(12 - 2x)^2$.

1 pt

✓ **Le fond est un carré de côté $12 - 2x$, puisqu'on retire x à chaque bout d'un côté ; son aire est $(12 - 2x)^2$. La hauteur vaut x , et le volume est l'aire du fond multipliée par la hauteur.**

→ **Pourquoi.** Chaque côté de la feuille perd deux fois x , un carré à chaque coin : oublier ce facteur 2 est l'erreur la plus fréquente.

b Quelles valeurs de x ont un sens dans cette situation ? Déduis-en le domaine de V pour le problème.

1 pt

✓ **Il faut $x > 0$ et $12 - 2x > 0$, soit $x < 6$: le domaine est $]0 ; 6[$.**

→ **Pourquoi.** Le domaine est imposé par la situation et non par l'expression, qui se calcule pour tout réel : pour $x = 0$ ou $x = 6$, il n'y a plus de boîte.

c Calcule $V(1)$, $V(2)$ et $V(4)$.

1 pt

✓ **$V(1) = 100$, $V(2) = 128$ et $V(4) = 64$, en cm^3 .**

→ **Pourquoi.** $V(1) = 1 \times 10^2$, $V(2) = 2 \times 8^2$, $V(4) = 4 \times 4^2$: on calcule la parenthèse, puis le carré, puis le produit.

d D'après le document 3, dans quel sens varie V entre 0 et 2, puis entre 2 et 6 ? Résume-le par un tableau.

1 pt

✓ **V augmente sur $[0 ; 2]$, puis diminue sur $[2 ; 6]$: $0 \nearrow 128 \searrow 0$.**

→ **Pourquoi.** La courbe monte de $x = 0$ à $x = 2$ puis descend jusqu'à $x = 6$; on écrit $V(0) = 0$, $V(2) = 128$, calculé à la question c, et $V(6) = 0$.

e Quelle conjecture peut-on faire sur le volume maximal ? Réponds par une phrase complète, avec les unités.

1 pt

✓ **Le volume semble maximal pour $x = 2$ cm ; ce volume maximal vaut alors 128 cm^3 .**

→ **Pourquoi.** Le maximum est une valeur de V , 128 cm^3 ; 2 cm est la valeur de x qui le donne. C'est une conjecture : le graphique ne le démontre pas.

f Pour quelles valeurs de x le volume atteint-il au moins 100 cm^3 ? Lis la réponse sur le document 3.

1 pt

✓ **Pour x compris entre 1 et environ 3,2 : $S \approx [1 ; 3,2]$.**

→ **Pourquoi.** On garde les abscisses des points de la courbe situés sur la droite d'ordonnée 100 ou au-dessus ; la borne 1 est exacte, puisque $V(1) = 100$, l'autre est une lecture approchée.

g Combien de valeurs de x donnent une boîte de 64 cm^3 ? Justifie à partir des variations de V , puis donne ces valeurs.

1 pt

✓ **Deux valeurs : l'une pendant la montée, entre 0 et 2, environ 0,5 ; l'autre pendant la descente, $x = 4$.**

→ **Pourquoi.** 64 est compris entre 0 et 128 sur $[0 ; 2]$ comme sur $[2 ; 6]$: une solution sur chaque intervalle. On connaît l'une exactement, $V(4) = 64$; l'autre se lit.

⚠ CE QUI COÛTE DES POINTS

Une conjecture sans unités ou sans l'endroit où le maximum est atteint : 0,5 sur 1.

Barème : 7 points — 1 par question.

🔍 ERREURS FRÉQUENTES

- Écrire que le fond a pour côté $12 - x$: on découpe un carré à chaque bout du côté, il faut retirer $2x$.
- Donner $\mathbb{R}$ comme domaine : l'expression se calcule partout, mais la boîte n'existe que pour $0 < x < 6$.
- Écrire « le volume maximal est 2 » : 2 cm est la valeur de x , le volume maximal vaut 128 cm^3 .

4 Une symétrie démontrée, puis exploitée

🕒 Prouver ou réfuter · Rédiger une justification

🕒 12 min

4 pts

RAPPEL DE COURS



Une fonction impaire vérifie $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de son domaine, qui doit donc être symétrique par rapport à 0 ; sa courbe est symétrique par rapport à l'origine : le point $(x; y)$ a pour symétrique le point $(-x; -y)$.

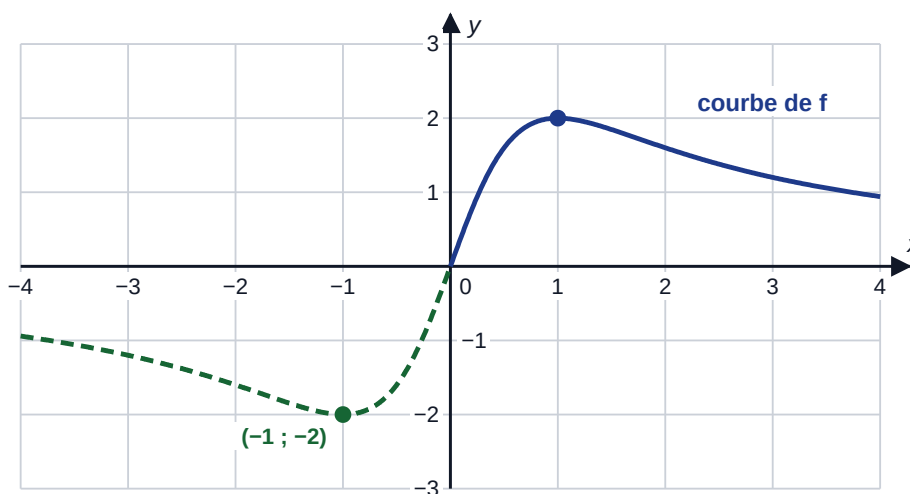


Figure complétée.

a Démontre que f est impaire.

1,5 pt

✓ $x^2 + 1$ ne s'annule jamais : $D_f = \mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x , $f(-x) = \frac{4 \times (-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{4x}{x^2 + 1} = -f(x)$.

→ **Pourquoi.** On remplace x par $-x$ partout : le numérateur change de signe, le dénominateur non, car $(-x)^2 = x^2$.

b Complète la courbe de f sur $[-4; 0]$.

1 pt

✓ On reporte, pour chaque point $(x; y)$ tracé, le point $(-x; -y)$: $(1; 2)$ donne $(-1; -2)$, et le tracé repasse par O .

→ **Pourquoi.** Une fonction impaire a une courbe symétrique par rapport à l'origine : chaque point $(x; y)$ a pour symétrique le point $(-x; -y)$.

c On admet que, sur $[0; 4]$, f prend des valeurs comprises entre 0 et 2, et que 2 est son maximum, atteint en $x = 1$. Déduis-en, sans calcul, le minimum de f sur $[-4; 4]$.

1 pt

✓ -2 , obtenu pour $x = -1$.

→ **Pourquoi.** Par imparité, les valeurs prises sur $[-4; 0]$ sont les opposées de celles prises sur $[0; 4]$: elles vont de -2 à 0. La plus petite est $f(-1) = -f(1) = -2$.

d Sur l'intervalle $[-2; 3]$, peut-on avoir $h(-x) = h(x)$ pour tout x ? Justifie.

0,5 pt

✓ **Non : 3 est dans l'intervalle, mais pas -3 ; l'égalité $h(-3) = h(3)$ n'a pas de sens, et h ne peut pas être paire.**

→ **Pourquoi.** La parité exige que $f(-x)$ existe pour tout x du domaine : le domaine doit être symétrique par rapport à 0.

⚠ **CE QUI COÛTE DES POINTS**

L'imparité affirmée d'après le dessin, sans calcul de $f(-x)$: 0 sur 1,5.

Barème : 4 points — 1,5 + 1 + 1 + 0,5.

🔍 **ERREURS FRÉQUENTES**

- Compléter la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : c'est la symétrie d'une fonction paire.
- Dédire un minimum égal à 2 ou atteint en 1 : l'imparité change le signe de la valeur et celui de l'abscisse.
- Oublier de vérifier que le domaine est symétrique avant de calculer $f(-x)$.



Barème de notation

Ce que le correcteur regarde, exercice par exercice.

20 pts

CE QUI EST ATTENDU	EXERCICE	POINTS	CE QUI FAIT PERDRE LE POINT
Les erreurs repérées et corrigées	1	4 points — 1 par erreur : 0,5 pour la repérer, 0,5 pour la corriger	Une erreur repérée sans la réponse juste : 0,5 sur 1.
Les affirmations prouvées ou réfutées	2	5 points — 1 par affirmation : 0,5 pour vrai ou faux, 0,5 pour la justification	« Faux » sans contre-exemple chiffré : 0,5 sur 1.
Le problème modélisé et résolu	3	7 points — 1 par question	Une conjecture sans unités ou sans l'endroit où le maximum est atteint : 0,5 sur 1.
La parité démontrée et exploitée	4	4 points — 1,5 + 1 + 1 + 0,5	L'imparité affirmée d'après le dessin, sans calcul de $f(-x)$: 0 sur 1,5.
Total		20 points	



Que faire de ta note ?

Le contrôle ne s'arrête pas au chiffre : voici la suite selon ton score.

☆☆☆ Niveau 1 · Essentiel	★★☆ Niveau 2 · Standard	★★★ Niveau 3 · Approfondi — tu es ici
-----------------------------	----------------------------	--



16 à 20

NIVEAU MAÎTRISÉ

C'est le niveau le plus élevé, et tu le maîtrises. Pour aller plus loin, reprends le problème de l'enclos de la fiche de cours et compare-le à celui de la boîte : même démarche, autre situation.



10 à 15

REFAIRE CE NIVEAU

Relis la correction de l'exercice où tu as perdu le plus de points. Réécris tes justifications en suivant le corrigé, puis refais le niveau 3 dans une semaine.



moins de 10

NIVEAU INFÉRIEUR

Repasse par le niveau 2 — Standard : il entraîne la résolution graphique, le tableau de variations et la parité par le calcul, dont ce niveau a besoin.

✓ COMPARE AVEC TA PRÉVISION

- Reprends la grille « Avant de rendre ta copie » : là où tu avais coché « acquis » et perdu des points, relis le rappel de cours de l'exercice.
- Refaire un contrôle quelques jours plus tard, sans regarder le corrigé, mesure ce que tu as retenu, et non ce dont tu te souviens.
- La fiche de cours du chapitre reprend chaque notion : ProgresSchool · Mathématiques Seconde · Généralités sur les fonctions.