

Divisibilité et nombres premiers

Mathématiques · 3ème
Contrôle n°1 · 55 min · sur 20

Exercice 1 — Premier, ou pas

4 pts 10 min

Reconnaître un nombre premier

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Un entier appartient à cette famille selon le nombre exact de ses diviseurs, et deux cas particuliers déroutent chaque année. Pour trancher, on essaie les premiers dans l'ordre — et on peut s'arrêter bien avant d'arriver au nombre lui-même.

1. Combien de diviseurs un nombre premier possède-t-il ? (1 pt)

Exactement deux

→ Un et lui-même, et rien d'autre.

2. Pourquoi 1 n'est-il pas premier ? (1 pt)

Il n'a qu'un seul diviseur.

→ Deux sont exigés, et il n'en a qu'un : la définition l'exclut.

3. Le nombre 91 est-il premier ? (1 pt)

Non : $91 = 7 \times 13$.

→ Il résiste à 2, 3 et 5, ce qui le fait croire premier ; le 7 le démasque.

4. Jusqu'où faut-il essayer des diviseurs pour tester 97 ? (1 pt)

Jusqu'à 7 : le carré du premier suivant dépasse déjà 97.→ $11 \times 11 = 121$, donc inutile d'aller plus loin.

Exercice 2 — Décomposer en escalier

4 pts 11 min

Décomposer un entier en facteurs premiers

On décompose 588. Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

On divise par le plus petit premier tant que c'est possible, puis on passe au suivant, sans jamais en sauter. Le produit obtenu s'écrit avec des exposants, et un dernier geste de cinq secondes le confirme.

1. Par quel nombre premier commence-t-on, et combien de fois ? (1 pt)

Par 2, deux fois : on obtient 147.→ $588 \div 2 = 294$, puis $294 \div 2 = 147$, qui est impair.

2. Quel premier vient ensuite, et pourquoi ? (1 pt)

3, car la somme des chiffres de 147 vaut 12.→ $147 \div 3 = 49$. Le critère évite tout tâtonnement.

3. Écris la décomposition complète. (1 pt)

 $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$

→ 49 se décompose en deux facteurs 7, et tous les facteurs sont premiers.

4. Quel geste le barème attend-il pour finir ? (1 pt)

Refaire le produit pour vérifier.

→ Cinq secondes, et le correcteur le voit.

Exercice 3 — Rendre une fraction irréductible

4 pts 11 min

Rendre une fraction irréductible

On étudie la fraction $\frac{168}{420}$. Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Simplifier ne suffit pas : il faut arriver au bout, et une seule division bien choisie y mène. Le nombre par lequel diviser se lit sur les deux décompositions écrites l'une sous l'autre.

1. Donne la décomposition du numérateur. (1 pt)

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

→ Trois divisions par 2, puis une par 3, et 7 termine.

2. Donne celle du dénominateur. (1 pt)

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

→ Deux divisions par 2, puis 3, puis 5, puis 7.

3. Quel nombre divise les deux ? (1 pt)

84

→ Les facteurs communs au plus petit exposant : $4 \times 3 \times 7 = 84$.

4. Donne la fraction irréductible. (1 pt)

$$\frac{2}{5}$$

→ $168 \div 84 = 2$ et $420 \div 84 = 5$: une seule division en haut et en bas.

Exercice 4 — Un problème de lots

5 pts 14 min

Modéliser et résoudre un problème de partage

Un club dispose de 72 badges et de 108 autocollants. Il veut constituer le plus grand nombre possible de pochettes identiques, en utilisant tout. Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

L'énoncé ne prononce jamais le mot attendu : il décrit une situation, et c'est à vous de dire quel nombre on cherche et pourquoi. Cette phrase est notée à part, et la question comporte deux réponses là où on n'en voit qu'une.

1. Écris la phrase qui dit ce qu'on cherche. (1 pt)

Le nombre de pochettes divise 72 et divise 108, et on le veut le plus grand possible.

→ C'est cette phrase qui porte les points de modélisation.

2. Décompose les deux nombres. (1 pt)

$$72 = 2^3 \times 3^2 \text{ et } 108 = 2^2 \times 3^3$$

→ Les deux décompositions s'écrivent l'une sous l'autre pour être comparées.

3. Combien de pochettes peut-on faire ? (1 pt)

36

→ Facteurs communs au plus petit exposant : $4 \times 9 = 36$.

4. Que contient chaque pochette ? (1 pt)

2 badges et 3 autocollants

→ $72 \div 36 = 2$ et $108 \div 36 = 3$: c'est la seconde réponse, et beaucoup l'oublient.

5. Quel mot de l'énoncé décide du calcul ? (1 pt)

« Le plus grand » : on cherche un diviseur, pas un multiple.

→ « Se retrouvent en même temps » demanderait l'autre notion.

Repérer une erreur et écrire la ligne juste

Chaque affirmation est fausse. Écris la réponse juste.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes coûtent des points au brevet. Le 1 glissé dans une décomposition. La notion changée en cours de route. Et une division euclidienne laissée inachevée.

1. « $45 = 1 \times 3^2 \times 5$. » (1 pt)

$$45 = 3^2 \times 5$$

→ La division en escalier finit sur 1, et ce 1 n'entre jamais dans le produit.

2. « Pour faire le plus grand nombre de sachets avec 84 bonbons et 126 caramels, je cherche un multiple commun. » (1 pt)

Un diviseur commun : le plus grand est 42.

→ Un multiple dépasserait les deux nombres, ce qui n'a aucun sens ici.

3. « $59 = 8 \times 6 + 11$, donc le reste vaut 11. » (1 pt)**Le reste doit rester inférieur au diviseur : $59 = 8 \times 7 + 3$.**

→ L'égalité est vraie, mais la division n'est pas terminée.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	La définition appliquée, et le test arrêté à temps	4 points — 1 par question	Un nombre déclaré premier sans qu'aucun diviseur ait été essayé.
Ex.2	La décomposition complète et vérifiée	4 points — 1 par question	Un facteur non premier laissé dans le produit final.
Ex.3	Le diviseur commun pris en une fois	4 points — 1 par question	Une fraction simplifiée deux fois de suite, et pas jusqu'au bout.
Ex.4	La phrase de modélisation, puis les deux réponses	5 points — 1 par question	Le nombre de lots donné sans dire ce que chaque lot contient.
Ex.5	L'erreur repérée, et la ligne juste écrite	3 points — 1 par ligne	Un reste supérieur au diviseur laissé tel quel.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est acquis. Entraîne-toi maintenant sur les énoncés du brevet où le mot « diviseur » n'apparaît jamais : c'est la phrase de modélisation qui rapporte, avant même le calcul.

10 à 15

Refais l'exercice 4 en écrivant d'abord la phrase qui dit pourquoi on cherche ce nombre-là. Elle vaut souvent plus que le résultat.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et apprends les critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9 : ils suppriment tout le tâtonnement de la décomposition.