



NIVEAU 2 SUR 3

Standard

Le niveau d'un contrôle de classe : choisir l'outil, enchaîner les calculs, rédiger une démonstration.

Questions guidées, sans banque de mots · 55 minutes · sur 20

# Théorème de Pythagore et sa réciproque

Corrigé du contrôle **niveau 2 · Standard**, avec le barème au point près.

## RAPPEL

La règle du cours que l'exercice met à l'épreuve, en tête de chaque exercice.

## ✓ RÉPONSE

Dans le cadre bordé : ce qui rapporte les points.

## → POURQUOI

Sous chaque réponse : la raison, pour comprendre et non recopier.

1

## Quel outil ?

☉ Choisir l'outil

🕒 7 min

2,5 pts

### RAPPEL DE COURS

📖 Le signal de Pythagore : un triangle rectangle, des longueurs, aucun angle. Le contre-signal : un angle dans les données ou la question, c'est la trigonométrie ; « démontrer qu'un angle est droit », c'est la réciproque.

a On veut savoir si le cadre d'une porte est d'équerre ; on a mesuré sa largeur, sa hauteur et sa diagonale. 0,5 pt

✓ **La réciproque : être d'équerre, c'est avoir un angle droit, et on le prouve avec trois mesures.**

→ **Pourquoi.** « Être d'équerre », c'est avoir un angle droit ; le prouver à partir de trois mesures est le rôle de la réciproque, jamais celui du théorème, qui suppose l'angle droit acquis.

b Un toboggan de 3 m de long fait un angle de  $40^\circ$  avec le sol ; on demande la hauteur de son sommet. 0,5 pt

✓ **La trigonométrie : un angle figure dans les données.**

→ **Pourquoi.** Avec une seule longueur et un angle, Pythagore ne peut rien : il lui faut deux côtés. Vu de l'angle de  $40^\circ$ , la hauteur est opposée et le toboggan est l'hypoténuse.

c Une cycliste roule 6 km vers l'ouest, puis 11 km vers le sud ; on demande sa distance à vol d'oiseau à son point de départ. 0,5 pt

✓ **Le théorème de Pythagore : l'ouest et le sud sont perpendiculaires, et l'on cherche l'hypoténuse à partir de deux longueurs.**

→ **Pourquoi.** Aucun triangle n'est dessiné, mais l'énoncé place l'angle droit là où la cycliste change de direction. On ne connaît que des longueurs.

d On connaît la diagonale et la largeur d'un écran rectangulaire ; on demande sa hauteur. 0,5 pt

✓ **Le théorème de Pythagore, avec une soustraction : la diagonale est l'hypoténuse, et elle est connue.**

→ **Pourquoi.** Largeur et hauteur forment l'angle droit du rectangle ; la diagonale lui est opposée. Connue, elle reste seule de son côté et l'on soustrait.

e Un câble de 13 m relie le sommet d'un mât vertical de 12 m au sol ; on demande la distance du piquet au pied du mât, puis l'angle du câble avec le sol. 0,5 pt

✓ **Le théorème de Pythagore pour la distance, puis la trigonométrie pour l'angle.**

→ **Pourquoi.** Les deux questions n'appellent pas le même outil : que des longueurs d'abord, puis un angle. C'est l'enchaînement le plus fréquent au brevet.

### ⚠ CE QUI COÛTE DES POINTS

Le bon outil sans justification : 0 sur 0,5.

Barème : 2,5 points — 0,5 par situation.

### 🔍 ERREURS FRÉQUENTES

- Répondre « Pythagore » dès qu'un triangle rectangle apparaît, même quand un angle est donné.
- Ne pas voir l'angle droit caché dans « ouest » et « sud », ou dans la largeur et la hauteur d'un écran.

## 2 Deux triangles dans un triangle

⊙ Calculer · Démontrer et rédiger

🕒 11 min

4,5 pts

### RAPPEL DE COURS

- 📖 Une hauteur partage un triangle en deux triangles rectangles qui ont le même angle droit. La réciproque, menée sur le plus grand côté, est le seul moyen de démontrer qu'un angle est droit : un dessin ne prouve rien.

a Calcule  $AC$ .

1,5 pt

✓  $AC^2 = AH^2 + HC^2 = 3,6^2 + 4,8^2 = 12,96 + 23,04 = 36$ , d'où  $AC = 6$  cm.

- **Pourquoi.** Le triangle  $AHC$  est rectangle en  $H$ , angle codé ;  $[AC]$  lui est opposé, et il est cherché : on additionne. Le correcteur attend le nom du triangle et la position de l'angle droit avant l'égalité.

b Calcule  $BC$ .

1,5 pt

✓  $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 6,4^2 + 4,8^2 = 40,96 + 23,04 = 64$ , d'où  $BC = 8$  cm.

- **Pourquoi.** Même raisonnement dans le triangle  $BHC$ , rectangle en  $H$  : l'angle droit en  $H$  appartient aux deux triangles, puisque  $(CH)$  est perpendiculaire à  $(AB)$ .

c Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ? Démonstre-le.

1,5 pt

✓  $AB = 3,6 + 6,4 = 10$  cm, plus grand côté ;  $AB^2 = 100$  et  $AC^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100$  : d'après la réciproque de Pythagore,  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

- **Pourquoi.** L'angle en  $C$  n'est pas codé : la figure ne suffit pas, il faut la réciproque. Le sommet de l'angle droit est celui qui est opposé au plus grand côté  $[AB]$ .

### ⚠ CE QUI COÛTE DES POINTS

Le sommet de l'angle droit mal placé au c : 1 sur 1,5.

Barème : 4,5 points — 1,5 par question.

### 🔍 ERREURS FRÉQUENTES

- Oublier de calculer  $AB = AH + HB$  avant d'appliquer la réciproque.
- Conclure « rectangle en  $H$  » à la question c : l'angle droit de  $ABC$  est en face de  $[AB]$ , donc en  $C$ .
- Affirmer que l'angle en  $C$  est droit « d'après la figure ».

## 3 Pythagore, puis un angle

⊙ Choisir l'outil · Calculer

🕒 9 min

3,5 pts

### RAPPEL DE COURS

- 📖 Que des longueurs : Pythagore. Un angle demandé : on change d'outil, et l'on choisit le rapport selon les côtés connus vus depuis l'angle — opposé, adjacent, hypoténuse. La touche inverse de la calculatrice donne l'angle.

a Calcule  $NP$ .

1,5 pt

✓  $NP^2 = MP^2 - MN^2 = 6,5^2 - 1,6^2 = 42,25 - 2,56 = 39,69$ , d'où  $NP = \sqrt{39,69} = 6,3$  cm.

- **Pourquoi.**  $[MP]$  est l'hypoténuse, opposée à l'angle droit en  $N$  ; elle est connue, donc on soustrait.

- b Quel rapport trigonométrique permet de calculer l'angle  $\widehat{MPN}$  avec les seules longueurs de l'énoncé ? Justifie.

0,5 pt

✓ **Le sinus : vu de  $P$ ,  $[MN]$  est le côté opposé et  $[MP]$  l'hypoténuse, deux longueurs données par l'énoncé.**

→ **Pourquoi.** Travailler avec les données de l'énoncé évite de propager une éventuelle erreur de la question a. La tangente, avec  $NP$ , donnerait le même angle.

- c Calcule la mesure de l'angle  $\widehat{MPN}$ , arrondie au degré.

1,5 pt

✓  $\sin \widehat{MPN} = \frac{MN}{MP} = \frac{1,6}{6,5} \approx 0,246$ , d'où  $\widehat{MPN} \approx 14^\circ$ .

→ **Pourquoi.** La touche inverse de la calculatrice donne environ  $14,25^\circ$ , soit  $14^\circ$  au degré près. Avec la tangente,  $\frac{1,6}{6,3}$ , on retrouve le même angle.

#### ⚠ CE QUI COÛTE DES POINTS

Le cosinus pris à la place du sinus : 0,5 sur 1,5 pour le calcul de l'angle.

Barème : 3,5 points — 1,5 + 0,5 + 1,5.

#### 🔍 ERREURS FRÉQUENTES

- Additionner à la question a :  $\sqrt{44,81} \approx 6,7$  cm, plus que l'hypoténuse.
- Prendre le cosinus avec  $MN$  et  $MP$  : vu de  $P$ ,  $[MN]$  est le côté opposé, pas le côté adjacent.
- Arrondir  $\sin \widehat{MPN}$  trop tôt, puis chercher l'angle à partir de l'arrondi.

## 4 Le coin du potager

🕒 Démontrer et rédiger

🕒 10 min

3,5 pts

### RAPPEL DE COURS



La réciproque compare le carré du plus grand côté à la somme des carrés des deux autres. Égaux : l'angle opposé au plus grand côté est droit. Différents : le triangle n'est pas rectangle, puisque le théorème aurait donné l'égalité.

- a Le premier coin, en  $B$ , est-il droit ? Rédige la démonstration.

1,5 pt

✓  $AC^2 = 1,69$  et  $AB^2 + BC^2 = 0,5^2 + 1,2^2 = 0,25 + 1,44 = 1,69$  : **d'après la réciproque,  $ABC$  est rectangle en  $B$ , le coin est droit.**

→ **Pourquoi.**  $[AC]$  est le plus grand côté, seul candidat à l'hypoténuse. Les longueurs sont celles du triplet (5 ; 12 ; 13) divisées par 10. Le sommet de l'angle droit,  $B$ , est bien opposé au plus grand côté  $[AC]$ .

- b Le second coin, en  $E$ , est-il droit ? Justifie.

1,5 pt

✓ **Non :  $DF^2 = 3,24$ , mais  $DE^2 + EF^2 = 0,64 + 2,25 = 2,89$  ; le coin n'est pas droit.**

→ **Pourquoi.** Si  $DEF$  était rectangle, son hypoténuse serait  $[DF]$  et le théorème de Pythagore imposerait l'égalité ; ce n'est pas le cas. La ligne 6 du carnet ne prouvait rien.

- c Sans changer  $DE$  ni  $EF$ , quelle longueur  $DF$  faudrait-il mesurer pour que le coin soit droit ?

0,5 pt

✓  $DF = \sqrt{2,89} = 1,7$  m, soit **10 cm de moins que la mesure de Sami.**

→ **Pourquoi.** Pour que le coin soit droit,  $[DF]$  doit être l'hypoténuse : son carré est la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit. C'est le triplet (8 ; 15 ; 17) divisé par 10.

### ⚠ CE QUI COÛTE DES POINTS

« Presque droit » écrit au lieu de « pas droit » : 0,5 sur 1,5.

Barème : 3,5 points — 1,5 + 1,5 + 0,5.

### 🔍 ERREURS FRÉQUENTES

- Conclure pour le second coin « presque droit » : 3,24 et 2,89 sont différents, le coin n'est pas droit.
- Se fier à la ligne 6 du carnet : un angle qui a l'air droit n'est pas démontré.
- Répondre  $DF = 2,89$  m à la question c en oubliant la racine carrée.

5

## La pyramide décorative ☆ EXERCICE-PHARE

🕒 Calculer · Raisonner dans l'espace

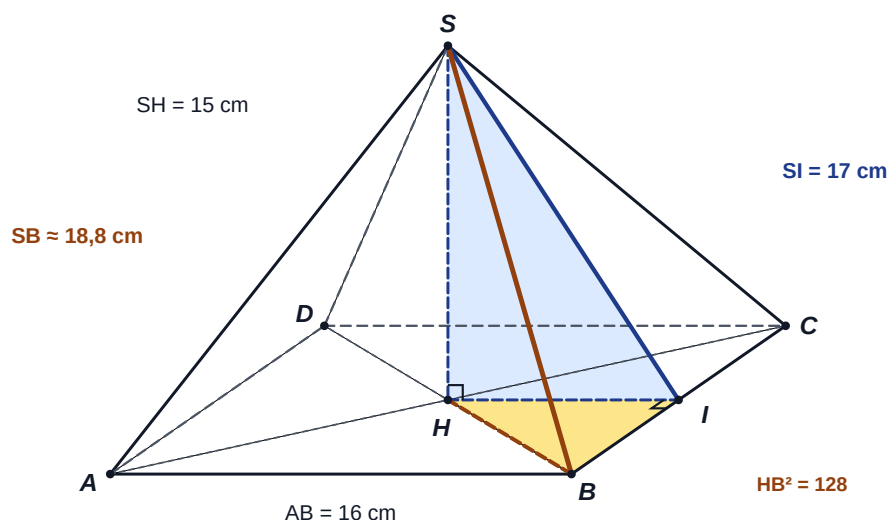
🕒 16 min

6 pts

### RAPPEL DE COURS



L'apothème vise le milieu d'un côté : un seul triangle, avec la hauteur et la moitié du côté. L'arête vise un sommet : la demi-diagonale de la base d'abord, puis un second triangle avec la hauteur. On n'arrondit qu'à la fin.



Document 2 annoté.

a Pourquoi l'angle  $\widehat{SHI}$  est-il droit ?

1 pt

✓  $(SH)$ , hauteur de la pyramide, est perpendiculaire au plan de la base, donc à  $(HI)$ .

→ **Pourquoi.** Sur une figure en perspective, l'angle droit ne se voit pas : il se justifie. La hauteur d'une pyramide est perpendiculaire à toute droite de la base passant par son pied  $H$ .

b Calcule  $HI$ .

0,5 pt

✓  $HI = 8$  cm : la moitié de  $AB$ .

→ **Pourquoi.**  $H$  est le centre du carré et  $I$  le milieu de  $[BC]$  :  $[HI]$  joint le centre au milieu d'un côté, sa longueur est la moitié de 16 cm.

c Calcule l'apothème  $SI$ .

1,5 pt

✓  $SI^2 = SH^2 + HI^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$ , d'où  $SI = 17$  cm.

→ **Pourquoi.** Dans  $SHI$ , rectangle en  $H$ , l'apothème est l'hypoténuse du triangle  $SHI$  : on additionne. (8 ; 15 ; 17) est un triplet pythagoricien du cours.

d Dans le triangle  $HIB$ , rectangle en  $I$ , que vaut  $HB^2$  ? Ne prends pas la racine.

1 pt

✓  $HB^2 = HI^2 + IB^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = 128$ .

→ **Pourquoi.**  $[HB]$  est la demi-diagonale de la base : l'arête vise un sommet, il faut donc d'abord atteindre ce sommet depuis le centre. On garde 128 tel quel, sans prendre la racine.

e Déduis-en  $SB$ , au millimètre près.

1,5 pt

✓  $SB^2 = SH^2 + HB^2 = 225 + 128 = 353$ , d'où  $SB = \sqrt{353} \approx 18,8$  cm.

→ **Pourquoi.** Second triangle rectangle,  $SHB$ , vertical et rectangle en  $H$  : la valeur exacte 128 est réutilisée telle quelle.  $\sqrt{353} \approx 18,79$ , soit 18,8 cm au millimètre ; on n'arrondit qu'ici.

f Compare  $SB$  et  $SI$ . Ce résultat était-il prévisible ?

0,5 pt

✓  $SB \approx 18,8$  cm est plus long que  $SI = 17$  cm. C'était prévisible : le sommet  $B$  est plus loin du centre  $H$  que le milieu  $I$  d'un côté.

→ **Pourquoi.** Les deux triangles ont le même côté  $[SH]$  ; celui de l'arête a l'autre côté le plus long,  $HB > HI$ , donc la plus grande hypoténuse.

⚠ CE QUI COÛTE DES POINTS

L'arête calculée dans le triangle de l'apothème : 0 sur 1,5 pour l'arête.

Barème : 6 points — 1 + 0,5 + 1,5 + 1 + 1,5 + 0,5.

🔍 ERREURS FRÉQUENTES

- Prendre le côté entier, 16 cm, au lieu de sa moitié dans le triangle  $SHI$ .
- Calculer l'arête avec le triangle de l'apothème : on retrouve 17 cm, qui n'est pas l'arête.
- Arrondir  $HB$  avant de calculer  $SB$ .



## Barème de notation

Ce que le correcteur regarde, exercice par exercice.

20 pts

| CE QUI EST ATTENDU                                    | EXERCICE | POINTS                                   | CE QUI FAIT PERDRE LE POINT                                                  |
|-------------------------------------------------------|----------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| L'outil choisi et justifié                            | 1        | 2,5 points — 0,5 par situation           | Le bon outil sans justification : 0 sur 0,5.                                 |
| Les deux triangles nommés, puis la réciproque rédigée | 2        | 4,5 points — 1,5 par question            | Le sommet de l'angle droit mal placé au c : 1 sur 1,5.                       |
| Pythagore puis la trigonométrie                       | 3        | 3,5 points — 1,5 + 0,5 + 1,5             | Le cosinus pris à la place du sinus : 0,5 sur 1,5 pour le calcul de l'angle. |
| La réciproque dans une situation concrète             | 4        | 3,5 points — 1,5 + 1,5 + 0,5             | « Presque droit » écrit au lieu de « pas droit » : 0,5 sur 1,5.              |
| L'apothème et l'arête de la pyramide                  | 5        | 6 points — 1 + 0,5 + 1,5 + 1 + 1,5 + 0,5 | L'arête calculée dans le triangle de l'apothème : 0 sur 1,5 pour l'arête.    |
| <b>Total</b>                                          |          | <b>20 points</b>                         |                                                                              |



## Que faire de ta note ?

Le contrôle ne s'arrête pas au chiffre : voici la suite selon ton score.



Niveau 1 · Essentiel



Niveau 2 · Standard — tu es ici



Niveau 3 · Approfondi



**16 à 20**

NIVEAU SUPÉRIEUR

C'est le niveau attendu en classe, et tu l'as. Passe au niveau 3 — Approfondi : une copie à corriger, des affirmations à justifier et un problème à étapes sans aucune aide.



**10 à 15**

REFAIRE CE NIVEAU

Repère l'exercice où tu as perdu le plus de points et relis son rappel de cours. Refais le niveau 2 dans quelques jours ; vise 16 avant de passer au niveau 3.



**moins de 10**

NIVEAU INFÉRIEUR

Fais d'abord le niveau 1 — Essentiel : il vérifie le vocabulaire, le sens du calcul et la réciproque pas à pas, dont ce contrôle a besoin.

### ✓ COMPARE AVEC TA PRÉVISION

- Reprends la grille « Avant de rendre ta copie » : là où tu avais coché « acquis » et perdu des points, relis le rappel de cours de l'exercice.
- Refaire un contrôle quelques jours plus tard, sans regarder le corrigé, mesure ce que tu as retenu, et non ce dont tu te souviens.
- La fiche de cours du chapitre reprend chaque notion : ProgresSchool · Mathématiques 3ème · Théorème de Pythagore et sa réciproque.