

Dérivation avancée — Composition et applications

Mathématiques · Terminale
Contrôle n°1 · 60 min · sur 20

Exercice 1 — Dériver une composée

4 pts 11 min

Appliquer la règle de dérivation d'une composée

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Une seule règle dérive toutes les fonctions emboîtées, et toutes les formules du tableau n'en sont que des cas particuliers. Un facteur en découle, et c'est lui qu'on perd.

1. Énonce la règle de dérivation de $x \mapsto u(v(x))$. (1 pt)**Sa dérivée vaut $v'(x) \times u'(v(x))$.**

→ On dérive l'extérieur en laissant l'intérieur intact, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur.

2. Quel est le premier geste avant toute dérivation d'une composée ? (1 pt)

Poser u explicitement sur une ligne à part, et calculer u' .

→ Substituer directement est ce qui fait perdre le facteur.

3. Comment vérifier une formule composée sur un cas trivial ? (1 pt)

En prenant $u = x$, donc $u' = 1$: chaque ligne redonne la dérivée usuelle.

→ C'est un contrôle immédiat qui ne coûte rien.

4. Dérive e^{3x} . (1 pt) **$3e^{3x}$**

→ La dérivée de l'intérieur vaut 3, et elle vient en facteur.

Exercice 2 — Deux dérivations

5 pts 14 min

Dériver des fonctions emboîtées

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Deux fonctions emboîtées, deux formes extérieures différentes. L'une pose en plus une question de domaine, où définie et dérivable ne veulent pas dire la même chose.

1. Pour $f(x) = e^{-x^2}$, pose u et calcule u' . (1 pt) **$u = -x^2$, donc $u' = -2x$.**

→ C'est la ligne à écrire avant tout autre calcul.

2. Donne $f'(x)$ et son signe. (1 pt) **$f'(x) = -2x e^{-x^2}$, du signe de $-2x$.**

→ L'exponentielle est toujours strictement positive.

3. Pour $g(x) = \ln(3x + 1)$, donne $g'(x)$. (1 pt) **$g'(x) = \frac{3}{3x+1}$** → La forme est $\ln u$, de dérivée $\frac{u'}{u}$, avec $u' = 3$.4. Sur quel ensemble $\sqrt{u}$ est-elle définie, et sur lequel est-elle dérivable ? (1 pt)**Définie quand $u \geq 0$, dérivable seulement quand $u > 0$.**

→ La dérivée n'existe pas partout où la fonction existe.

5. Quelle condition $\ln u$ impose-t-elle ? (1 pt) **$u > 0$**

→ C'est la même condition que pour le logarithme simple, appliquée à l'intérieur.

Exercice 3 — Optimiser

4 pts 11 min

Mener un problème d'optimisation

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Un problème concret se traduit en fonction, puis se résout par la dérivée. La première étape est celle qu'on saute, et sans elle la copie devient illisible.

1. Quelle est la première étape d'un problème d'optimisation ? (1 pt)

Choisir la variable et la nommer clairement, avec son unité.

→ Une variable non nommée rend tout le reste illisible.

2. Que faut-il déterminer en même temps que l'expression à optimiser ? (1 pt)

L'intervalle dans lequel la variable peut varier.

→ Les contraintes géométriques ou physiques le fixent.

3. Quelles opérations mène-t-on ensuite sur la dérivée ? (1 pt)

On dérive, on factorise, puis on étudie son signe sur cet intervalle.

→ La factorisation précède toujours l'étude du signe.

4. Que doit contenir la réponse finale ? (1 pt)

La valeur optimale et la grandeur optimisée, avec leurs unités.

→ La question demande souvent les deux, et n'en donner qu'une coûte un point.

Exercice 4 — Local, global, et les bornes

4 pts 13 min

Distinguer extremum local et global

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Deux adjectifs distinguent deux sortes d'extremums, et l'un des deux peut se cacher là où la dérivée ne s'annule pas.

1. Quelle différence y a-t-il entre un maximum local et un maximum global ? (1 pt)

Le local n'est pas dépassé au voisinage d'un point ; le global ne l'est nulle part sur l'intervalle.

→ Un maximum global est toujours local, l'inverse est faux.

2. À quelle condition un extremum local se produit-il ? (1 pt)

En un point où la dérivée change de signe.

→ L'annulation seule ne suffit pas.

3. Quel exemple montre que l'annulation ne suffit pas ? (1 pt)

$x \mapsto x^3$ en 0 : la dérivée s'annule, la fonction reste strictement croissante.

→ Sa dérivée $3x^2$ est positive de part et d'autre.

4. Sur un intervalle fermé, que faut-il comparer en plus ? (1 pt)

Les valeurs aux bornes.

→ Le maximum global peut y être atteint, là où la dérivée ne s'annule pas.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Un facteur oublié dans une composée. Un domaine de dérivabilité pris pour un domaine de définition. Et un extremum conclu d'une simple annulation.

1. « La dérivée de $\ln(5x)$ est $\frac{1}{5x}$. » (1 pt)C'est $\frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$.→ Le facteur $u' = 5$ manque, et l'erreur ne produit aucune absurdité visible.2. « $\sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$, donc dérivable sur $[0; +\infty[$. » (1 pt)Elle n'est dérivable que sur $]0; +\infty[$.

→ En 0, la tangente est verticale : le nombre dérivé n'existe pas.

3. « La dérivée s'annule en ce point de l'intervalle fermé : c'est donc le maximum global. » (1 pt)

Il faut encore comparer aux valeurs des bornes.

→ Le maximum global peut être atteint en une borne, où la dérivée ne s'annule pas.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	La règle de dérivation d'une composée	4 points — 1 par question	Le facteur u' oublié.
Ex.2	Deux dérivations menées jusqu'au bout	5 points — 1 par question	Un domaine de dérivabilité confondu avec un domaine de définition.
Ex.3	La méthode d'optimisation	4 points — 1 par question	Une variable employée sans avoir été nommée.
Ex.4	Extremums locaux et globaux	4 points — 1 par question	Les bornes d'un intervalle fermé laissées de côté.
Ex.5	L'erreur repérée, et le calcul juste donné	3 points — 1 par ligne	Une exponentielle composée dérivée sans son facteur.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant à répondre complètement à un problème d'optimisation : la question demande souvent les dimensions et la valeur optimale. Donner l'une sans l'autre coûte un point.

10 à 15

Refais l'exercice 1 en posant systématiquement u et u' sur une ligne à part. Tant que ces deux lignes ne sont pas écrites, ne dérive rien.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et vérifie la règle sur un cas trivial : avec $u = x$, donc $u' = 1$, chaque formule composée doit redonner la dérivée usuelle.