

Géométrie vectorielle dans l'espace

Mathématiques · Terminale
Contrôle n°1 · 60 min · sur 20

Exercice 1 — Le produit scalaire

4 pts 11 min

Calculer un produit scalaire dans l'espace

On donne $\vec{u}(1; 2; -1)$ et $\vec{v}(3; -1; 1)$, dans un repère orthonormé.

LA RÈGLE DU COURS

La formule du plan, avec un terme de plus. Sa propriété décisive est inchangée, et elle fonde presque tout le chapitre.

1. Écris la formule du produit scalaire dans l'espace. (1 pt)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

→ Elle suppose un repère orthonormé.

2. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et conclus. (1 pt)

$$3 - 2 - 1 = 0 : \text{les vecteurs sont orthogonaux.}$$

→ Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux.

3. Écris la formule de la norme et calcule $\|\vec{u}\|$. (1 pt)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6}$$

→ $1 + 4 + 1 = 6$, et l'on garde la valeur exacte.

4. Que dit le signe du produit scalaire sur l'angle ? (1 pt)

Positif, l'angle est aigu ; nul, il est droit ; négatif, obtus.

→ C'est l'orthogonalité lue sous un autre jour.

Exercice 2 — Colinéaires, coplanaires

4 pts 11 min

Distinguer colinéarité et coplanarité

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Deux notions voisines, dont l'une ne pouvait pas se poser dans le plan. Elle sert à décider si quatre points de l'espace tiennent dans une même surface plate.

1. Quand deux vecteurs sont-ils colinéaires ? (1 pt)

$$\text{Lorsque l'un est un multiple de l'autre : } \vec{v} = k\vec{u}.$$

→ C'est la même définition que dans le plan.

2. Quand trois vecteurs sont-ils coplanaires ? (1 pt)

$$\text{Lorsque l'un s'écrit comme combinaison des deux autres.}$$

→ Cela revient à dire qu'ils tiennent tous trois dans un même plan.

3. À quoi sert la coplanarité ? (1 pt)

$$\text{À décider si quatre points de l'espace sont dans un même plan.}$$

→ C'est une question que la géométrie plane ne pouvait pas poser.

4. Écris la formule donnant le cosinus de l'angle entre deux vecteurs. (1 pt)

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

→ On en tire l'angle à la calculatrice.

Exercice 3 — Le vecteur normal

5 pts 14 min

Employer le vecteur normal d'un plan

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Un objet définit un plan à lui seul, donne son équation, mesure une distance et tranche les positions relatives. Il se lit parfois sans aucun calcul.

1. Quand un vecteur non nul est-il normal à un plan ? (1 pt)

Lorsqu'il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

→ En pratique, il suffit qu'il le soit à deux vecteurs non colinéaires du plan.

2. Combien un plan a-t-il de vecteurs normaux ? (1 pt)

Une infinité, tous colinéaires entre eux.

→ C'est la direction qui compte, pas la longueur.

3. Quelle est la forme d'une équation cartésienne de plan ? (1 pt)

$$ax + by + cz + d = 0$$

→ Dans l'espace, une équation décrit un plan et non une droite.

4. Comment lit-on un vecteur normal dans cette équation ? (1 pt)

Ce sont les trois premiers coefficients : $\vec{n}(a; b; c)$.

→ La lecture se fait sans aucun calcul.

5. Comment trouve-t-on un vecteur normal quand l'énoncé ne le donne pas ? (1 pt)

On l'écrit orthogonal à deux vecteurs du plan, ce qui donne deux équations, et l'on fixe arbitrairement une coordonnée.

→ Fixer une coordonnée est licite puisque seule la direction compte.

Exercice 4 — Une équation complète

4 pts 13 min

Déterminer l'équation d'un plan

On cherche le plan passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; 1; 2)$.

LA RÈGLE DU COURS

Connaissant un vecteur normal et un point, l'équation s'écrit en trois lignes. La quatrième ligne, celle qu'on saute, évite une erreur qu'aucun autre contrôle ne révèle.

1. Écris l'équation avec sa constante inconnue. (1 pt)

$$2x + y + 2z + d = 0$$

→ Les coefficients sont les coordonnées du vecteur normal.

2. Remplace par les coordonnées de A . (1 pt)

$$2 + 2 + 6 = 10$$

→ On substitue $x = 1, y = 2, z = 3$.

3. Détermine d et donne l'équation. (1 pt)

$$10 + d = 0, \text{ donc } d = -10 : \text{ le plan a pour équation } 2x + y + 2z - 10 = 0.$$

→ La constante se déduit de l'appartenance du point au plan.

4. Pourquoi vérifier l'équation sur un second point connu ? (1 pt)

Parce qu'une erreur de signe sur la constante est invisible autrement.

→ Elle fausserait toutes les distances calculées ensuite.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Une équation de l'espace prise pour une droite. Un vecteur normal cherché alors qu'il était écrit. Et une coplanarité confondue avec une colinéarité.

1. « L'équation $2x + y + 2z - 10 = 0$ est celle d'une droite de l'espace. » (1 pt)

C'est l'équation d'un plan.

→ L'intuition trompeuse vient de la géométrie plane, où une telle équation décrit une droite.

2. « Pour trouver un vecteur normal à ce plan, je pose un système de deux équations. » (1 pt)

Il se lit directement : ce sont les trois premiers coefficients de l'équation.

→ Le système ne sert que lorsque l'équation n'est pas donnée.

3. « Ces trois vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils ne sont pas coplanaires. » (1 pt)

Trois vecteurs peuvent être coplanaires sans être colinéaires deux à deux.

→ La coplanarité demande qu'un vecteur soit combinaison des deux autres.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	Le produit scalaire et la norme	4 points — 1 par question	Un produit scalaire calculé hors d'un repère orthonormé.
Ex.2	Colinéarité, coplanarité et angles	4 points — 1 par question	La coplanarité confondue avec la colinéarité.
Ex.3	Le vecteur normal et l'équation d'un plan	5 points — 1 par question	Un vecteur normal cherché par le calcul alors qu'il se lisait dans l'équation.
Ex.4	Une équation déterminée et vérifiée	4 points — 1 par question	Une constante déterminée sans vérification sur un second point.
Ex.5	L'erreur repérée, et le calcul juste donné	3 points — 1 par ligne	Une équation de l'espace prise pour celle d'une droite.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant à reconnaître le fil du chapitre : presque chaque exercice revient à trouver un vecteur normal, puis à faire un produit scalaire.

10 à 15

Refais l'exercice 4 en vérifiant chaque équation sur un second point connu du plan. Une erreur de signe sur la constante est invisible autrement.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et retiens le renversement qui ouvre le chapitre : dans l'espace, une équation cartésienne décrit un plan.