

Intégration — Primitive et intégrale définie

Mathématiques · Terminale
Contrôle n°1 · 60 min · sur 20

Exercice 1 — Les primitives

4 pts 11 min

Déterminer une primitive

On cherche la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ vérifiant $F(1) = 0$.

LA RÈGLE DU COURS

Remonter une dérivée ne donne jamais une seule réponse. Une condition supplémentaire, souvent donnée par l'énoncé, permet de choisir laquelle.

1. Qu'est-ce qu'une primitive de f sur un intervalle ? (1 pt)**Une fonction F dérivable telle que $F' = f$.**

→ Toute fonction continue sur un intervalle en admet.

2. Pourquoi n'y en a-t-il jamais une seule ? (1 pt)

Parce que $F + C$ convient aussi pour toute constante C .

→ La dérivée d'une constante est nulle.

3. Donne la forme générale des primitives de f . (1 pt) **$F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C$** → On remonte terme à terme : $3x^2$ vient de x^3 , $-4x$ de $-2x^2$.4. Détermine C avec la condition donnée. (1 pt) **$F(1) = 1 - 2 + 5 + C = 4 + C$, donc $C = -4$.**

→ La condition fixe la constante et donne la primitive cherchée.

Exercice 2 — Les formes composées

4 pts 11 min

Reconnaître une primitive composée

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Trois écritures reviennent sans cesse, et on les reconnaît toutes au même indice. Quand cet indice n'y est qu'à une constante près, on l'y met.

1. Quelle est une primitive de $u' e^u$? (1 pt) **e^u**

→ La dérivée de l'intérieur est déjà là, en facteur.

2. Quelle est une primitive de $\frac{u'}{u}$? (1 pt) **$\ln |u|$** → La valeur absolue permet de couvrir les intervalles où u est négative.3. Quelle est une primitive de $u' u^n$? (1 pt) **$\frac{u^{n+1}}{n+1}$**

→ C'est la règle des puissances, appliquée à une composée.

4. Donne une primitive de $2x e^{x^2}$. (1 pt) **e^{x^2}** → La dérivée de x^2 est $2x$, et elle est bien en facteur.

Exercice 3 — L'intégrale définie

5 pts 14 min

Employer le théorème fondamental

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Un théorème transforme un problème d'aire vieux de deux mille ans en une soustraction. Trois propriétés servent ensuite constamment.

1. Énonce le théorème fondamental du calcul. (1 pt)

Si F est une primitive de f continue sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

→ On note cette quantité entre crochets.

2. Pourquoi n'écrit-on pas de constante dans une intégrale définie ? (1 pt)

Parce qu'elle disparaît dans la soustraction.

→ $F(b) + C - (F(a) + C)$ ne dépend pas de C .

3. Une intégrale définie est-elle un nombre ou une fonction ? (1 pt)

Un nombre.

→ Confondre une intégrale définie et une primitive fausse toute la rédaction.

4. Énonce la relation de Chasles pour les intégrales. (1 pt)

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

→ Elle permet de couper un intervalle là où la fonction change de signe.

5. Qu'est-ce que la linéarité permet de faire ? (1 pt)

Découper une somme et sortir les constantes.

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

Exercice 4 — Aire et parties

4 pts 13 min

Calculer une aire et intégrer par parties

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Une intégrale ne donne l'aire que sous une condition. Et quand l'intégrande est un produit dont aucune primitive n'est connue, une formule échange une intégrale contre une autre.

1. À quelle condition l'intégrale donne-t-elle l'aire du domaine ? (1 pt)

Lorsque la fonction est positive sur tout l'intervalle.

→ Sinon, l'intégrale est un bilan algébrique où les parties se compensent.

2. Calcule l'aire sous $f(x) = 3x^2 + 2x$ entre 0 et 2. (1 pt)

$$F(x) = x^3 + x^2, \text{ et } F(2) - F(0) = 12 - 0 = 12 \text{ unités d'aire.}$$

→ La fonction est positive sur $[0; 2]$: l'intégrale donne bien l'aire.

3. Comment choisit-on u dans une intégration par parties ? (1 pt)

On pose u la partie qui se simplifie en dérivant.

→ Un polynôme perd un degré, un logarithme devient une fraction rationnelle.

4. Que faire si la nouvelle intégrale est plus compliquée que la première ? (1 pt)

Recommencer en échangeant u et v' .

→ Le choix était inversé, et rien d'autre n'est à corriger.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Une aire annoncée négative. Une constante traînée dans une intégrale définie. Et un choix de u qui complique au lieu de simplifier.

1. « L'intégrale vaut -2 , donc l'aire du domaine vaut -2 . » (1 pt)

Une aire est toujours positive : il faut couper l'intervalle et prendre la valeur absolue de chaque morceau.

→ L'intégrale compte négativement ce qui est sous l'axe.

2. « $\int_0^1 2x \, dx = [x^2 + C]_0^1 = 1 + C$ » (1 pt)

La constante disparaît dans la soustraction : l'intégrale vaut 1.

→ On n'écrit pas de constante dans une intégrale définie.

3. « Une primitive de $\frac{1}{u}$ est $\ln |u|$. » (1 pt)

C'est une primitive de $\frac{u'}{u}$: il faut la dérivée de l'intérieur en facteur.

→ Sans elle, la dérivation de $\ln |u|$ redonnerait $\frac{u'}{u}$ et non $\frac{1}{u}$.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	Les primitives et la constante	4 points — 1 par question	Une primitive donnée comme si elle était unique.
Ex.2	Les trois formes composées	4 points — 1 par question	Une forme composée employée sans la dérivée de l'intérieur.
Ex.3	Le théorème fondamental et ses propriétés	5 points — 1 par question	Une constante d'intégration conservée dans une intégrale définie.
Ex.4	Aire et intégration par parties	4 points — 1 par question	Une aire annoncée négative.
Ex.5	L'erreur repérée, et le calcul juste donné	3 points — 1 par ligne	Un u et un v' choisis dans le mauvais sens.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant au cas le plus surprenant de l'intégration par parties : $\int \ln x$, en posant $u = \ln x$ et $v' = 1$. Cela paraît étrange et fonctionne parfaitement.

10 à 15

Refais l'exercice 4 en étudiant le signe de la fonction avant d'intégrer. S'il change, coupe l'intervalle par la relation de Chasles.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et retiens le signe qui trahit une forme composée : la dérivée de l'intérieur est déjà là, en facteur.