

Limites de fonctions et continuité

Mathématiques · Terminale
Contrôle n°1 · 60 min · sur 20

Exercice 1 — Les quatre formes

4 pts 11 min

Reconnaître une forme indéterminée

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Quatre combinaisons ne permettent aucune conclusion à partir des seules limites des morceaux. Les nommer est un point ; s'y arrêter n'en vaut aucun.

1. Cite les quatre formes indéterminées. (1 pt)

 $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$ et $\frac{0}{0}$.

→ Aucune ne permet de conclure à partir des seules limites des morceaux.

2. Que signifie exactement « forme indéterminée » ? (1 pt)

Que la forme ne suffit pas à décider, et qu'il faut réécrire l'expression.

→ Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de limite.

3. Quelle est la limite d'un produit, tant qu'aucune indétermination n'apparaît ? (1 pt)

Le produit des limites.

→ Il en va de même pour la somme, et pour le quotient si le dénominateur ne tend pas vers 0.

4. Donne la limite de $\ln x$ en $+\infty$ et en 0^+ . (1 pt) $+\infty$ en $+\infty$, et $-\infty$ en 0^+ .

→ Ce sont deux des limites usuelles qui se lisent sur les courbes connues.

Exercice 2 — Lever par le terme dominant

4 pts 11 min

Lever une indétermination par factorisation

On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 4}$.

LA RÈGLE DU COURS

Un quotient de polynômes en l'infini donne toujours la même forme indéterminée, et toujours la même technique la lève. Un raccourci se dégage, qu'il faut savoir justifier.

1. Quelle forme obtient-on en l'état ? (1 pt)

 $\frac{\infty}{\infty}$, indéterminée.→ Numérateur et dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$.

2. Par quoi factorise-t-on, en haut comme en bas ? (1 pt)

Par x^2 , terme de plus haut degré des deux.

→ C'est la technique standard pour un quotient de polynômes.

3. Que deviennent les autres termes après simplification ? (1 pt)

Ils tendent tous vers 0.→ Chacun s'écrit comme une puissance de $\frac{1}{x}$.

4. Quelle est la limite cherchée ? (1 pt)

3→ Il reste le rapport des coefficients dominants, $\frac{3}{1}$.

Exercice 3 — Gendarmes et croissances comparées

5 pts 14 min

Employer gendarmes et croissances comparées

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Deux outils traitent ce que la factorisation ne sait pas faire. L'un affronte une fonction dont la limite n'existe pas, l'autre départage deux infinis qui ne vont pas à la même vitesse.

1. Énonce le théorème des gendarmes. (1 pt)

Si $g \leq f \leq h$ et si g et h ont la même limite ℓ , alors f tend aussi vers ℓ .

→ C'est la seule méthode disponible quand l'expression contient un sinus ou un cosinus.

2. Pourquoi ne peut-on pas calculer directement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x}$? (1 pt)

Parce que $\cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

→ Aucune opération sur les limites ne s'applique.

3. Encadre $2x + \cos x$, puis divise par $x > 0$. (1 pt)

$2x - 1 \leq 2x + \cos x \leq 2x + 1$, d'où $2 - \frac{1}{x} \leq \frac{2x + \cos x}{x} \leq 2 + \frac{1}{x}$.

→ La division par un nombre positif conserve le sens des inégalités.

4. Conclut. (1 pt)

La limite vaut 2.

→ Les deux encadrants tendent vers 2 : le théorème des gendarmes s'applique.

5. Énonce la règle des croissances comparées. (1 pt)

L'exponentielle l'emporte sur toute puissance, qui l'emporte sur le logarithme.

→ D'où $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ln x}{x^n} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

Exercice 4 — Continuité et TVI

4 pts 14 min

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Un théorème transforme une observation graphique en démonstration. Il demande quatre justifications, et l'une d'elles seulement donne l'unicité.

1. Quand une fonction est-elle continue en a ? (1 pt)

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

→ Intuitivement : la courbe se trace sans lever le crayon.

2. Une fonction continue est-elle toujours dérivable ? Et l'inverse ? (1 pt)

Non ; en revanche toute fonction dérivable est continue.

→ La valeur absolue est continue en 0 sans y être dérivable.

3. Énonce le théorème des valeurs intermédiaires. (1 pt)

Si f est continue sur $[a; b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a; b]$.

→ Le théorème démontre une existence, il ne donne jamais la valeur.

4. Qu'est-ce qui donne l'unicité de la solution ? (1 pt)

La stricte monotonie de f sur l'intervalle.

→ Elle s'établit par le signe de la dérivée, et elle seule donne l'unicité.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Une différence d'infinis calculée comme une soustraction. Une limite prêtée à une fonction qui n'en a pas. Et une unicité affirmée sans monotonie.

1. « $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = 0$, puisque $\infty - \infty = 0$. » (1 pt)

La limite vaut $+\infty$: $x^2 - x = x(x - 1)$.

→ Deux quantités qui tendent vers l'infini peuvent avoir une différence infinie ou finie.

2. « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 0$, puisque le sinus oscille autour de 0. » (1 pt)

Le sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

→ Osciller n'est pas tendre vers une valeur : il faut encadrer l'expression entière.

3. « f est continue et $f(a) < 0 < f(b)$: l'équation $f(x) = 0$ a donc une unique solution. » (1 pt)

Elle en a au moins une ; l'unicité demande la stricte monotonie.

→ Sans monotonie, la courbe peut traverser l'axe plusieurs fois.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	Les quatre formes indéterminées	4 points — 1 par question	Une forme indéterminée annoncée puis laissée telle quelle.
Ex.2	La levée par le terme dominant	4 points — 1 par question	Un quotient de polynômes conclu sans factorisation.
Ex.3	Gendarmes et croissances comparées	5 points — 1 par question	Une limite de cosinus invoquée alors qu'elle n'existe pas.
Ex.4	Continuité et valeurs intermédiaires	4 points — 1 par question	Une unicité conclue sans stricte monotonie.
Ex.5	L'erreur repérée, et la réponse juste donnée	3 points — 1 par ligne	Une différence d'infinis déclarée nulle.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant à rédiger une application du théorème des valeurs intermédiaires en quatre justifications séparées : continuité, monotonie, valeurs aux bornes, conclusion. Elles comptent séparément au barème.

10 à 15

Refais l'exercice 2 en factorisant systématiquement par le terme de plus haut degré, en haut comme en bas. Tout le reste tend vers 0, et il ne reste que le rapport des dominants.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et retiens la phrase des croissances comparées : l'exponentielle bat toute puissance, toute puissance bat le logarithme.