

Fonction logarithme népérien

Exercice 1 — La définition

4 pts 11 min

Définir le logarithme népérien

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Une fonction réciproque d'une autre, définie sur une demi-droite seulement. Trois valeurs et un sens de variation suffisent à contrôler n'importe quel calcul.

1. Écris l'équivalence qui définit le logarithme. (1 pt)

$$\ln x = y \iff e^y = x, \text{ pour } x > 0.$$

→ C'est la fonction réciproque de l'exponentielle.

2. Sur quel ensemble est-il défini, et pourquoi pas ailleurs ? (1 pt)

Sur $]0; +\infty[$: aucune puissance de e ne donne un nombre négatif ou nul.

→ C'est la première vérification de tout exercice.

3. Que valent $\ln 1$ et $\ln e$? (1 pt)**0 et 1.**→ Parce que $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.4. Quel est le signe de $\ln x$ selon x , et quelle est sa dérivée ? (1 pt)**Positif si $x > 1$, négatif si $0 < x < 1$; sa dérivée est $\frac{1}{x}$.**

→ La dérivée étant positive, la fonction est strictement croissante.

Exercice 2 — Les trois règles

4 pts 11 min

Appliquer les propriétés algébriques du logarithme

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Chaque opération descend d'un cran : une multiplication devient une addition, et ainsi de suite. Une opération, et une seule, n'a aucune règle — et c'est celle qu'on croit connaître.

1. Que devient un produit, un quotient et une puissance sous un logarithme ? (1 pt)

Une somme, une différence et un produit.

→ Le logarithme abaisse chaque opération d'un cran.

2. Quelle condition ces règles exigent-elles ? (1 pt)

Que les nombres soient strictement positifs.

→ C'est la première chose à vérifier avant de les appliquer.

3. Que valent $\ln \frac{1}{a}$ et $\ln \sqrt{a}$? (1 pt) **$-\ln a$ et $\frac{1}{2} \ln a$.**→ Ce sont deux cas de la règle de la puissance, avec $n = -1$ et $n = \frac{1}{2}$.4. Pourquoi $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$ est-il faux ? (1 pt)**La règle transforme un produit en somme, jamais une somme en somme.**→ Avec $a = b = 1$: $\ln 2 \approx 0,69$ à gauche, 0 à droite.

Exercice 3 — Simplifier une écriture

4 pts 13 min

Simplifier une expression logarithmique

On cherche à écrire $A = \ln 8 - 2 \ln 4 + \ln 32$ sous la forme $k \ln 2$.

LA RÈGLE DU COURS

Plusieurs logarithmes de nombres différents se réduisent souvent à un seul, à condition de voir qu'ils sont tous des puissances d'un même entier.

1. Écris 8, 4 et 32 comme puissances de 2. (1 pt)

$$8 = 2^3, 4 = 2^2, 32 = 2^5.$$

→ C'est le geste qui rend la simplification possible.

2. Réécris A en faisant descendre les exposants. (1 pt)

$$A = 3 \ln 2 - 2 \times 2 \ln 2 + 5 \ln 2$$

→ La règle de la puissance fait descendre chaque exposant en facteur.

3. Calcule le coefficient final. (1 pt)

$$3 - 4 + 5 = 4$$

→ Les trois termes portent tous le même facteur $\ln 2$.

4. Donne A . (1 pt)

$$A = 4 \ln 2$$

→ C'est la forme demandée, avec $k = 4$.

Exercice 4 — Équations et inéquations

5 pts 14 min

Résoudre une équation logarithmique

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Une condition se pose avant tout calcul, et les solutions doivent y être confrontées à la fin. Une inéquation, elle, ne change jamais de sens — c'est la seule facilité du chapitre.

1. Quelle est la toute première étape d'une résolution ? (1 pt)

Poser la condition d'existence : chaque expression sous un logarithme doit être strictement positive.

→ Elle se pose d'abord, pas à la fin pour vérifier.

2. À quoi se ramène l'équation $\ln A = \ln B$? (1 pt)

$$\text{À } A = B.$$

→ La fonction étant strictement croissante, elle est injective.

3. À quoi équivaut $\ln x = k$? (1 pt)

$$\text{À } x = e^k.$$

→ On revient à l'exponentielle quand un seul membre porte un logarithme.

4. Une inéquation $\ln A < \ln B$ change-t-elle de sens ? (1 pt)

Non : elle équivaut à $A < B$.

→ Le logarithme est croissant, donc il conserve l'ordre.

5. Une population double chaque année. Au bout de combien d'années est-elle multipliée par plus de 1 000 ? (1 pt)

Au bout de 10 ans.

→ $2^{10} = 1024 > 1000$ alors que $2^9 = 512 < 1000$.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Une somme décomposée. Une solution gardée malgré la condition d'existence. Et une croissance comparée prise à l'envers.

1. « $\ln(x + 3) = \ln x + \ln 3$ » (1 pt)

Une somme sous un logarithme ne se décompose pas.

→ Il faudrait un produit : $\ln(3x) = \ln x + \ln 3$.2. « J'ai trouvé $x = -2$ comme solution de $\ln(x) = \ln(x^2 - 2)$, je la garde. » (1 pt)La condition d'existence impose $x > 0$: cette solution est à écarter.

→ Une solution négative peut apparaître au calcul sans être recevable.

3. « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$, puisque $\ln x \rightarrow +\infty$. » (1 pt)

Cette limite vaut 0.

→ Dans un affrontement entre logarithme et puissance, la puissance gagne toujours.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	La définition et les valeurs de contrôle	4 points — 1 par question	Un logarithme calculé pour un nombre négatif.
Ex.2	Les trois règles algébriques	4 points — 1 par question	Une somme décomposée comme un produit.
Ex.3	Un calcul d'écriture simplifiée	4 points — 1 par question	Des nombres non ramenés à une même base.
Ex.4	Équations, inéquations et conditions	5 points — 1 par question	Une solution conservée sans la confronter à la condition d'existence.
Ex.5	L'erreur repérée, et le calcul juste donné	3 points — 1 par ligne	Un logarithme d'une somme développé.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant sur ce que le logarithme sait faire et qu'aucun autre outil du programme ne sait : résoudre une équation où l'inconnue est en exposant.

10 à 15

Refais l'exercice 4 en posant la condition d'existence avant tout calcul, et en y confrontant chaque solution à la fin. C'est l'étape que les copies sautent.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et retiens le réflexe devant une parenthèse : si a et b sont séparés par un $+$, aucune règle ne s'applique tant qu'on n'a pas factorisé.