

Probabilités — Variables aléatoires et loi normale

Mathématiques · Terminale
Contrôle n°1 · 60 min · sur 20

Exercice 1 — Le passage au continu

4 pts 11 min

Comprendre une loi continue

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Entre deux valeurs, il y en a une infinité : la liste des probabilités ne tient plus. Une courbe la remplace, et une conséquence surprend.

1. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire continue ? (1 pt)

Une variable qui prend toutes les valeurs d'un intervalle.

→ Sa loi n'est plus donnée par un tableau mais par une fonction de densité.

2. Comment calcule-t-on $P(a \leq X \leq b)$? (1 pt)**Par l'aire sous la courbe de densité entre a et b , c'est-à-dire une intégrale.**

→ C'est ce qui relie la loi normale au calcul intégral.

3. Que vaut l'aire totale sous une densité ? (1 pt)

1

→ C'est la traduction du fait que la variable prend forcément une valeur.

4. Pourquoi $P(X = 1,70) = 0$ ne signifie-t-il pas que cette taille est impossible ? (1 pt)**Parce que l'aire au-dessus d'un point unique est toujours nulle.**

→ Probabilité nulle et impossibilité diffèrent dès qu'on quitte le discret.

Exercice 2 — Les deux paramètres

4 pts 11 min

Lire les paramètres d'une loi normale

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Une courbe en cloche se décrit par deux nombres, et tous deux se lisent directement sur le dessin. L'un est un axe, l'autre une largeur.

1. Comment note-t-on la loi normale de paramètres μ et σ ? (1 pt) **$\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$**

→ La notation porte la variance, mais c'est l'écart-type qu'on emploie ensuite.

2. Que représente μ sur la cloche ? (1 pt)**L'espérance, c'est-à-dire l'axe de symétrie.**→ La courbe est symétrique par rapport à la verticale d'abscisse μ .3. Que représente σ ? (1 pt)**L'écart-type, qui mesure l'étalement de la cloche.**→ Un σ petit donne une cloche resserrée et haute.4. Que vaut $P(X \leq \mu)$, et pourquoi ? (1 pt)**0,5, par symétrie de la cloche.**

→ La moitié de l'aire est de chaque côté de l'axe.

Exercice 3 — La règle et la symétrie

5 pts 14 min

Employer la règle 68-95-99,7

Les scores à un test suivent la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 15.

LA RÈGLE DU COURS

Trois valeurs suffisent à répondre de tête à la plupart des questions. La symétrie fournit le reste, à condition de penser à partager ce qui dépasse en deux.

1. Énonce la règle 68-95-99,7. (1 pt)

Environ 68 % des valeurs entre $\mu \pm \sigma$, 95 % entre $\mu \pm 2\sigma$, 99,7 % entre $\mu \pm 3\sigma$.

→ Ce sont les trois valeurs à connaître par cœur.

2. Quelle proportion obtient un score entre 85 et 115 ? (1 pt)

Environ 68 %.

→ $85 = 100 - 15$ et $115 = 100 + 15$: ce sont exactement $\mu \pm \sigma$.

3. À combien d'écarts-types de la moyenne se situe le score 130 ? (1 pt)

Deux.

→ $130 = 100 + 2 \times 15$: l'écart de 30 vaut deux écarts-types.

4. Quelle proportion dépasse 130 ? (1 pt)

Environ 2,5 %.

→ Hors de $\mu \pm 2\sigma$ il reste 5 %, répartis également des deux côtés.

5. Pourquoi divise-t-on par deux ce qui reste ? (1 pt)

Parce que la cloche est symétrique : ce qui dépasse d'un côté vaut ce qui dépasse de l'autre.

→ Oublier ce partage double la réponse.

Exercice 4 — Le score réduit

4 pts 13 min

Calculer et interpréter un score réduit

Un élève obtient 130 à un test de moyenne 100 et d'écart-type 15, et 62 à un autre de moyenne 50 et d'écart-type 8.

LA RÈGLE DU COURS

Deux notes obtenues sur des échelles différentes ne se comparent pas telles quelles. Un changement de variable les ramène sur une échelle commune, qui dit quelque chose de plus que la note.

1. Écris le changement de variable qui ramène à la loi centrée réduite. (1 pt)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

→ On retranche la moyenne, puis on divise par l'écart-type.

2. Que dit le score réduit ? (1 pt)

À combien d'écarts-types de la moyenne se situe la valeur.

→ C'est cette information, et non la valeur brute, qui mesure le caractère exceptionnel.

3. Calcule les deux scores réduits. (1 pt)

$$\frac{130-100}{15} = 2 \text{ et } \frac{62-50}{8} = 1,5.$$

→ On calcule l'écart, puis on le divise par l'écart-type.

4. Laquelle des deux performances est la plus rare ? (1 pt)

La première, dont le score réduit est le plus élevé.

→ Les notes brutes ne sont pas comparables : les échelles diffèrent.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Une probabilité nulle prise pour une impossibilité. Une queue non partagée. Et deux notes comparées sans être réduites.

1. «
- $P(X = 50) = 0$
- : cette valeur ne peut donc pas se produire. » (1 pt)

Pour une variable continue, toute valeur isolée a une probabilité nulle.

→ Elle reste parfaitement atteignable.

2. « Hors de
- $\mu \pm 2\sigma$
- il reste 5 % : donc 5 % dépassent
- $\mu + 2\sigma$
- . » (1 pt)

2,5 % seulement, l'autre moitié étant en dessous de $\mu - 2\sigma$.

→ La symétrie partage ce qui reste en deux parts égales.

3. « Il a eu 62 à l'un et 130 à l'autre : la seconde note est bien meilleure. » (1 pt)

Il faut calculer les scores réduits pour comparer deux échelles différentes.

→ Les moyennes et les écarts-types des deux tests ne sont pas les mêmes.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	Le passage au continu	4 points — 1 par question	Une probabilité nulle prise pour une impossibilité.
Ex.2	Les paramètres de la loi normale	4 points — 1 par question	La variance employée à la place de l'écart-type.
Ex.3	La règle 68-95-99,7 et la symétrie	5 points — 1 par question	Une queue de distribution non divisée par deux.
Ex.4	Le score réduit	4 points — 1 par question	Deux notes comparées sans être ramenées à la même échelle.
Ex.5	L'erreur repérée, et la réponse juste donnée	3 points — 1 par ligne	Une règle appliquée à des bornes qui ne sont pas des multiples de l'écart-type.

ET MAINTENANT ?

16 à 20

Le chapitre est tenu. Entraîne-toi maintenant à repérer d'abord si les bornes tombent sur $\mu \pm \sigma$, $\pm 2\sigma$ ou $\pm 3\sigma$: quand c'est le cas, aucune calculatrice n'est nécessaire, et l'énoncé l'attend souvent.

10 à 15

Refais l'exercice 3 en dessinant la cloche et en hachurant la zone cherchée. La symétrie donne alors la moitié des réponses sans calcul.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et retiens la conséquence pratique du continu : $P(X < a)$ et $P(X \leq a)$ sont identiques, et tu n'as plus à te demander si la borne est incluse.