

Paradigme diviser pour régner

NSI · Terminale
Contrôle n°1 · 60 min · sur 20

Exercice 1 — Le principe

4 pts 11 min

Énoncer le paradigme

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Trois étapes composent le paradigme, et le gain ne vient pas d'où l'on croit.

1. Que fait le paradigme diviser pour régner ? (1 pt)

Il décompose un problème en sous-problèmes de même nature mais de taille moindre, les résout, puis combine les solutions partielles.

→ La résolution se fait le plus souvent par récurrence.

2. Quelles sont ses trois étapes ? (1 pt)

Diviser, régner, combiner.

→ Les trois se suivent dans cet ordre.

3. D'où vient le gain ? (1 pt)

Du fait que la somme des coûts des sous-problèmes plus le coût de combinaison soit inférieure au coût direct.

→ Il ne vient donc pas de la division en elle-même.

4. Le paradigme garantit-il une meilleure performance ? (1 pt)

Non : c'est une méthode de conception, pas une garantie.

→ Annoncer une complexité parce qu'on reconnaît le paradigme confond la forme et le coût.

Exercice 2 — Les deux conditions

5 pts 14 min

Vérifier les conditions d'efficacité

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Deux conditions décident de l'efficacité, et l'échec de l'une suffit à annuler le gain.

1. Quelle est la première condition ? (1 pt)

Les sous-problèmes doivent être de tailles comparables.→ Couper en deux moitiés égales fait chuter la profondeur à $\log n$.

2. Que se passe-t-il si l'on coupe en un élément et le reste ? (1 pt)

On retombe sur un parcours linéaire.

→ Le découpage ne réduit alors la taille que d'une unité à chaque étape.

3. Quelle est la seconde condition ? (1 pt)

L'étape de combinaison doit rester peu coûteuse.

→ Si recoller coûte autant que résoudre, le découpage n'apporte rien.

4. Quel exemple montre qu'un découpage déséquilibré annule le gain ? (1 pt)

Le tri rapide mal pivoté, qui dégénère en $O(n^2)$.

→ Il devient alors aussi coûteux qu'un tri élémentaire.

5. Que faut-il faire avant d'annoncer la moindre complexité ? (1 pt)

Vérifier les deux conditions.

→ La reconnaissance du paradigme ne dit rien du coût réel.

Exercice 3 — Trois exemples

4 pts 11 min

Analyser trois algorithmes

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Trois algorithmes classiques relèvent du paradigme, et chacun illustre un point différent.

1. Pourquoi la recherche dichotomique n'a-t-elle rien à combiner ? (1 pt)

Parce qu'elle divise l'espace de recherche en deux et n'en garde qu'une moitié.

→ D'où sa complexité en $O(\log n)$.

2. Qu'est-ce qui donne au tri fusion sa garantie en $O(n \log n)$ dans tous les cas ? (1 pt)

La garantie de tailles égales et une combinaison bon marché, la fusion se faisant en temps linéaire.

→ Les deux conditions y sont donc satisfaites d'avance.

3. Quel avantage le tri rapide a-t-il sur le tri fusion ? (1 pt)

Sa combinaison est gratuite : après partition, les deux parties sont déjà à leur place relative.

→ Le tri fusion, lui, doit fusionner explicitement.

4. De quoi dépend l'équilibre des tailles dans le tri rapide, et avec quelles conséquences ? (1 pt)

Du pivot : bien choisi, $O(n \log n)$ en moyenne ; systématiquement mal choisi, $O(n^2)$.

→ D'où les stratégies de choix de pivot, qui sont tout l'enjeu de son implémentation.

Exercice 4 — Calculer la complexité

4 pts 13 min

Poser une récurrence de complexité

Réponds à chaque question.

LA RÈGLE DU COURS

Le coût s'exprime par une relation qui rapporte le coût d'une entrée à celui de ses sous-problèmes. Trois cas se présentent.

1. Comment la complexité se calcule-t-elle ? (1 pt)

Par une relation de récurrence : le coût pour une entrée de taille n s'exprime en fonction du coût des sous-problèmes et du coût de combinaison.

→ C'est cette relation qu'il faut poser avant de conclure.

2. Que donne l'équation de maître ? (1 pt)

Le résultat selon lequel des deux termes l'emporte.

→ Elle départage les sous-problèmes et la combinaison.

3. Quels sont les trois cas possibles ? (1 pt)

La combinaison domine et fixe la complexité ; les sous-problèmes dominant et la fixent ; ou ils s'équilibrent et un facteur logarithmique apparaît.

→ Le troisième cas est celui du tri fusion.

4. Sur un million d'éléments, combien vaut environ $n \log n$, et n^2 ? (1 pt)

Environ 20 millions pour $n \log n$, et 10^{12} pour n^2 .

→ Le rapport entre les deux dépasse cinquante mille.

Repérer une erreur et la corriger

Chaque affirmation est fausse. Écris ce qu'il fallait dire.

LA RÈGLE DU COURS

Trois fautes reviennent. Une forme prise pour un coût, une condition ignorée, et une garantie attribuée à tort.

1. « Mon algorithme divise le problème : il est donc plus efficace qu'une approche directe. » (1 pt)

Le paradigme est une méthode de conception, pas une garantie de performance.

→ Il faut vérifier les tailles comparables et le coût de la combinaison.

2. « Je découpe mon tableau en un élément d'un côté et tout le reste de l'autre : c'est bien diviser pour régner. » (1 pt)

Les sous-problèmes doivent être de tailles comparables ; ce découpage ramène au parcours linéaire.→ La profondeur ne chute à $\log n$ qu'avec des moitiés égales.3. « Le tri rapide garantit une complexité en $O(n \log n)$. » (1 pt)**Il l'atteint en moyenne avec un bon pivot ; systématiquement mal pivoté, il dégénère en $O(n^2)$.**

→ C'est le tri fusion qui offre la garantie dans tous les cas.

Barème — ce que le correcteur regarde

Les lignes chiffrées couvrent les 5 exercices et totalisent 20 points.

EXERCICE	ATTENDU	POINTS	POINT PERDU SI
Ex.1	Le principe et ses trois étapes	4 points — 1 par question	Le gain attribué à la division elle-même.
Ex.2	Les deux conditions	5 points — 1 par question	Une condition sur deux énoncée.
Ex.3	Les trois exemples	4 points — 1 par question	Le tri rapide crédité d'une garantie qu'il n'a pas.
Ex.4	Calculer la complexité	4 points — 1 par question	Une complexité annoncée sans récurrence.
Ex.5	L'erreur repérée, et la réponse juste donnée	3 points — 1 par ligne	Une correction qui confond la forme de l'algorithme et son coût.

ET MAINTENANT ?**16 à 20**

Le chapitre est acquis. Entraîne-toi maintenant à concevoir en cinq temps : le découpage de même nature, les tailles comparables vérifiées, le cas de base écrit, la combinaison estimée, et la récurrence posée.

10 à 15

Refais l'exercice 2 en te demandant chaque fois laquelle des deux conditions est en cause.

moins de 10

Reprends la fiche de cours et retiens d'où vient le gain : non de la division, mais du fait que la somme des coûts des sous-problèmes plus la combinaison soit inférieure au coût direct.