CORRIGÉ

Modèle quadratique — Paraboles, sommet et forme factorisée

1re
Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Associer une parabole à son expression

1. **a.** P_2 est tournée vers le bas : $a < 0$, donc f ou k. Elle coupe l'axe des ordonnées en 4 :
   $f(0) = -0^2 + 4 = 4$
   alors que $k(0) = 0$: P_2 représente f.
2. P_1 a pour sommet O et est tournée vers le haut : seule g convient ($a = 0{,}5 > 0$, $c = 0$). Contrôle :
   $g(2) = 0{,}5 \times 2^2 = 2$
   P_1 représente g.
3. $h(-1) = 2 \times 0 \times (-3) = 0$ et $h(2) = 2 \times 3 \times 0 = 0$: les racines de h sont -1 et 2, donc P_3 représente h.
4. **b.** $k(x) = -0{,}5x^2$ a pour sommet O et est tournée vers le bas : aucune des trois paraboles n'a ces deux caractéristiques.
5. **c.** L'axe de P_3 passe au milieu des racines :
   $\dfrac{-1+2}{2} = 0{,}5$
6. Ordonnée du sommet :
   $h(0{,}5) = 2 \times 1{,}5 \times (-1{,}5) = -4{,}5$
   le sommet de P_3 est $(0{,}5\,;\,-4{,}5)$.
7. **d.** P_1 passe par $(2\,;\,2)$ et, par symétrie, par $(-2\,;\,2)$: $g(x) = 2 \iff x = -2$ ou $x = 2$. P_1 est sous la droite $y = 2$ entre ces deux points : $g(x) < 2 \iff x \in\ ]-2\,;\,2[$.

2 Équations produit nul

1. **a.** $x - 4 = 0 \iff x = 4$; $x + 2 = 0 \iff x = -2$. Les solutions sont -2 et 4.
2. **b.** $-3 \neq 0$, donc $x = 0$ ou $x - 5 = 0$. Les solutions sont 0 et 5.
3. **c.** $2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$; $x + 3 = 0 \iff x = -3$. Contrôle :
   $2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = 0$
   les solutions sont -3 et $\dfrac{1}{2}$.
4. **d.** On factorise par x : $x^2 - 7x = x(x-7)$, donc $x = 0$ ou $x = 7$. Les solutions sont 0 et 7.

3 Étudier le signe de $f(x) = -2(x-1)(x+4)$

1. **a.** $x - 1 = 0 \iff x = 1$ et $x + 4 = 0 \iff x = -4$: les racines sont -4 et 1.
2. **b.** Le produit $(x-1)(x+4)$ est positif à l'extérieur de $[-4\,;\,1]$ et négatif entre -4 et 1. Le facteur -2, négatif, inverse tout : $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,-4[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$ sur $]-4\,;\,1[$, et f s'annule en -4 et en 1.
3. **c.** D'après le tableau, $f(x) > 0 \iff x \in\ ]-4\,;\,1[$ (racines exclues, l'inégalité est stricte).
4. **d.** L'axe passe au milieu des racines :
   $\dfrac{-4+1}{2} = -1{,}5$
5. Ordonnée du sommet :
   $f(-1{,}5) = -2 \times (-2{,}5) \times 2{,}5 = 12{,}5$
   le sommet est $(-1{,}5\,;\,12{,}5)$; $a = -2 < 0$, c'est un **maximum**.

4 Le sommet de $f(x) = x^2 + 6x + 5$, sans formule

1. **a.** $f(x) = 5 \iff x^2 + 6x = 0 \iff x(x+6) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -6$.
2. Les points d'abscisses 0 et -6 ont la même ordonnée 5 ; l'axe passe au milieu :
   $\dfrac{0 + (-6)}{2} = -3$
   axe d'équation $x = -3$.
3. **b.** Ordonnée du sommet :
   $f(-3) = (-3)^2 + 6 \times (-3) + 5 = -4$
   le sommet est $(-3\,;\,-4)$.
4. $a = 1 > 0$: f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-3]$, croissante sur $[-3\,;\,+\infty[$, de minimum -4 atteint en -3.
5. **c.** $(x+1)(x+5) = x^2 + 5x + x + 5 = x^2 + 6x + 5 = f(x)$. Les racines sont -1 et -5, de milieu :
   $\dfrac{-1 + (-5)}{2} = -3$
   on retrouve l'axe $x = -3$.

---

5 Vrai ou faux ? Justifier.

1. **a. Vrai.** C'est la forme $ax^2 + c$ avec $c = 5$: sommet $(0\,;\,5)$, et un maximum puisque $a = -3 < 0$.
2. **b. Faux.** $x + 2 = 0 \iff x = -2$ et $x - 7 = 0 \iff x = 7$: les racines sont -2 et 7.
3. **c. Vrai.** $a = 2 > 0$: f a le signe contraire de a entre ses racines 1 et 5, elle y est négative.
4. **d. Faux.** $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 3 \geq 3 > 0$: la fonction ne s'annule jamais, elle n'a aucune racine.
5. **e. Vrai.** $x^2 - 8x + 3 = 3 \iff x(x-8) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 8$; l'axe passe au milieu, en $x = 4$.
   $\dfrac{0 + 8}{2} = 4$
6. **f. Vrai.** $a = -1 < 0$ et le sommet est O : la fonction est croissante sur $]-\infty\,;\,0]$, puis décroissante.

---

6 Le lancer d'un ballon

1. **a.** $h(0) = 1{,}5$: le ballon est lâché à 1,5 m du sol, la hauteur de la main du lanceur.
2. **b.** $h(t) = 1{,}5 \iff -5t^2 + 20t = 0 \iff -5t(t-4) = 0 \iff t = 0$ ou $t = 4$.
3. Les instants 0 et 4 donnent la même hauteur : l'axe passe au milieu.
   $\dfrac{0 + 4}{2} = 2$
4. Hauteur à cet instant :
   $h(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 + 1{,}5 = 21{,}5$
   $a = -5 < 0$: c'est un maximum. Le ballon est au plus haut 2 s après le lancer, à 21,5 m.
5. **c.** On développe : $-5(t-1)(t-3) = -5(t^2 - 4t + 3) = -5t^2 + 20t - 15$, et $h(t) - 16{,}5 = -5t^2 + 20t + 1{,}5 - 16{,}5 = -5t^2 + 20t - 15$: l'égalité est vraie.
6. $a = -5 < 0$: $h(t) - 16{,}5$ est positif entre les racines 1 et 3, donc $h(t) > 16{,}5 \iff t \in]1\,;\,3[$.
7. Durée :
   $3 - 1 = 2$
   le ballon reste plus de 16,5 m au-dessus du sol pendant 2 secondes.

---

7 L'arche d'un viaduc

1. **a.** $h(0) = -0{,}02 \times 0 \times (-50) = 0$ et $h(50) = -0{,}02 \times 50 \times 0 = 0$: les deux pieds sont au niveau 0, l'arche est large de 50 m.
2. **b.** L'axe passe au milieu des racines 0 et 50 :
   $\dfrac{0+50}{2} = 25$
3. Hauteur au milieu :
   $h(25) = -0{,}02 \times 25 \times (-25) = 12{,}5$
   $a = -0{,}02 < 0$: c'est un maximum. L'arche culmine à 12,5 m.
4. **c.** $-0{,}02(x-10)(x-40) = -0{,}02(x^2 - 50x + 400) = -0{,}02x^2 + x - 8$, et $h(x) - 8 = -0{,}02x^2 + x - 8$: l'égalité est vraie.
5. $a = -0{,}02 < 0$: $h(x) - 8 \geq 0 \iff x \in [10\,;\,40]$. L'arche est à 8 m ou plus entre 10 m et 40 m du pied gauche.
6. Largeur :
   $40 - 10 = 30$
   la péniche dispose d'un passage de 30 m de large.

---

8 Repérer l'erreur

1. **a.** La recherche de l'axe est juste : $g(x) = -10 \iff -2x^2 + 12x = 0 \iff x(-2x+12) = 0$, et $-2x + 12 = 0 \iff x = 6$; le milieu de 0 et 6 est 3.
2. **b.** Première erreur : Léo a calculé $(-2 \times 3)^2$ au lieu de -2×3^2. Le carré porte sur 3 seulement :
   $-2 \times 3^2 = -18$
3. D'où l'ordonnée du sommet :
   $g(3) = -18 + 36 - 10 = 8$
4. Seconde erreur : $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. g est croissante sur $]-\infty\,;\,3]$, décroissante sur $[3\,;\,+\infty[$, et le sommet $(3\,;\,8)$ donne un **maximum**, 8.
5. **c.** $-2(x-1)(x-5) = -2(x^2 - 6x + 5) = -2x^2 + 12x - 10 = g(x)$. Les racines 1 et 5 ont bien 3 pour milieu.
6. $a = -2 < 0$: $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,1[$ et sur $]5\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$ sur $]1\,;\,5[$, et g s'annule en 1 et en 5.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Associer parabole et expression par l'orientation, le sommet ou les racines, et un point de contrôle	3 pts	Conclure sur l'allure seule ; calculer $-x^2$ comme $(-x)^2$
Résoudre une équation produit nul et donner les racines	3 pts	Lire 3 au lieu de -3 dans $(x+3)$; oublier la solution $x = 0$ dans $x(x-7) = 0$
Trouver l'axe au milieu de deux points de même ordonnée, puis l'ordonnée du sommet	5 pts	Prendre $(0\,;\,c)$ pour le sommet ; une erreur de priorité dans $f(\text{milieu})$
Dresser un tableau de signes ou de variation cohérent avec le signe de a	5 pts	Oublier le facteur a négatif ; des variations inversées par rapport à l'orientation
Répondre au problème dans le contexte, avec l'unité	4 pts	Confondre l'abscisse et l'ordonnée du sommet ; une réponse hors du domaine du modèle