1re

COURS

Modèle quadratique — Paraboles, sommet et forme factorisée

Programme de mathématiques intégré à l'enseignement scientifique de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602916A

Un ballon lancé en l'air, l'arche d'un viaduc, le chiffre d'affaires d'un produit selon son prix : trois grandeurs qui montent puis redescendent, et trois courbes qui sont des **paraboles**. **Une parabole a un axe de symétrie vertical, et son sommet — le point le plus haut ou le plus bas — est sur cet axe, au milieu de deux points de même hauteur.** Trouver cet axe sans formule, en déduire le sommet, lire racines et signe sur une forme factorisée : voilà le chapitre.

1 L'allure d'une parabole

DÉFINITION

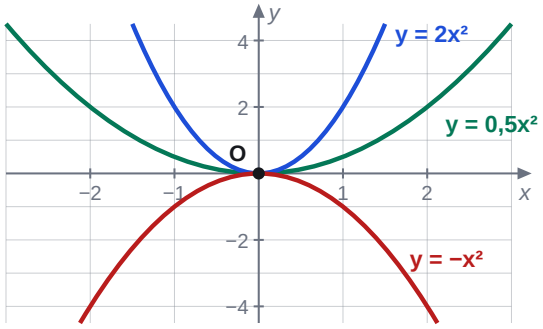
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$, est une **fonction polynôme de degré 2**. Sa courbe représentative est une **parabole**. Comme $f(0) = c$, la parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;\,c)$. Son **sommet** est le point où f atteint son maximum ou son minimum.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

PROPRIÉTÉ

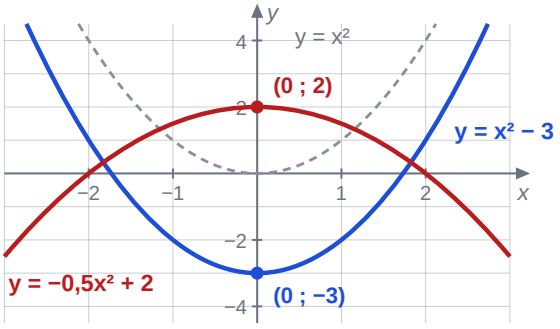
Cas $x \mapsto ax^2$: sommet O, axe de symétrie l'axe des ordonnées. *Démonstration :* $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$, donc les points d'abscisses x et $-x$ ont la même ordonnée. Si $0 \leq u < v$, alors $u^2 < v^2$ (fonction carré, vue en seconde) ; multiplier par $a > 0$ conserve cet ordre, par $a < 0$ l'inverse. Donc si $a > 0$, la parabole est **tournée vers le haut** (minimum 0) ; si $a < 0$, **vers le bas** (maximum 0). **Cas** $x \mapsto ax^2 + c$: ajouter c à chaque ordonnée déplace la courbe verticalement de c ; le sommet devient $(0\,;\,c)$, l'extremum vaut c. Plus $|a|$ est grand, plus la parabole est **resserrée**.

x ↦ ax² : le signe de a décide de l'ouverture



a > 0 : vers le haut ; a < 0 : vers le bas

x ↦ ax² + c : la courbe montée ou descendue de c



sommet (0 ; c), sur l'axe des ordonnées

Le signe de a oriente la parabole, $|a|$ règle son ouverture, c la fait monter ou descendre.

RÈGLE

Toute parabole a un axe de symétrie vertical, qui passe par son sommet (propriété admise dans le cas général). Conséquence : deux points distincts d'une parabole qui ont **la même ordonnée** sont symétriques par rapport à cet axe. **L'axe passe donc au milieu de leurs abscisses** : si $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$, l'axe est la droite d'équation $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

ASSOCIER UNE PARABOLE À SON EXPRESSION

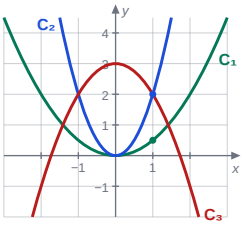
1. **Orientation** : tournée vers le haut, $a > 0$; vers le bas, $a < 0$.
2. **Sommet ou intersections** : pour $ax^2 + c$, le sommet est $(0\,;\,c)$; pour $a(x - x_1)(x - x_2)$, la courbe coupe l'axe des abscisses en x_1 et x_2.
3. **Un point de contrôle** pour départager les dernières candidates : on calcule $f(1)$, ou l'image d'une abscisse lisible, et on vérifie sur la courbe.

EXEMPLE

Associer les courbes C_1, C_2, C_3 ci-contre aux fonctions $f(x) = 2x^2$, $g(x) = -x^2 + 3$ et $h(x) = 0{,}5x^2$.

1. C_3, seule tournée vers le bas, de sommet $(0\,;\,3)$: c'est g, seule fonction où $a < 0$.
2. C_1 et C_2 ont toutes deux pour sommet O et sont tournées vers le haut. Point de contrôle en $x = 1$:
   $f(1) = 2 \times 1^2 = 2$
   et $h(1) = 0{,}5$: la courbe qui passe par $(1\,;\,2)$, la plus resserrée, est C_2.

C_1 représente h, C_2 représente f, C_3 représente g.



Même sommet pour C_1 et C_2 : c'est le point d'abscisse 1 qui tranche.

PIÈGE

Pour $g(x) = -x^2 + 3$, calculer $g(-2) = 4 + 3 = 7$. — $-x^2$ est l'opposé du carré : on élève au carré **d'abord**. $g(-2) = -(-2)^2 + 3 = -1$, et 7 dépasserait le maximum 3.

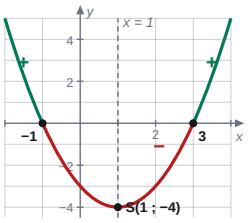
Ce que ça coûte : le point de contrôle, et donc l'association

Le réflexe : remplacer x par (-2) **avec ses parenthèses**.

2 Forme factorisée : racines, sommet, signe

PROPRIÉTÉ

Une **racine** de f est un réel x tel que $f(x) = 0$: l'abscisse d'un point où la parabole coupe l'axe des abscisses. Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$. **Les racines de f sont exactement x_1 et x_2.** *Démonstration :* un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ; a ne l'est pas, donc $f(x) = 0 \iff x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$. Si $x_1 \neq x_2$, les points $(x_1\,;\,0)$ et $(x_2\,;\,0)$ ont la même ordonnée : **l'axe de symétrie est la droite** $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, et l'ordonnée du sommet est l'image de ce milieu.



$f(x) = (x + 1)(x - 3)$: racines -1 et 3, axe au milieu, sommet sur l'axe.

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION PRODUIT NUL

1. **Écrire un produit égal à zéro**, en factorisant si besoin : $x^2 - 7x = 0 \iff x(x - 7) = 0$.
2. **Annuler chaque facteur du premier degré**, puis conclure par toutes les solutions. Un facteur constant non nul, comme a, ne s'annule jamais.

EXEMPLE

Pour $f(x) = (x + 1)(x - 3)$, déterminer les racines, l'axe de symétrie et le sommet de la parabole.

1. $x + 1 = 0 \iff x = -1$ et $x - 3 = 0 \iff x = 3$: les racines sont -1 et 3.
2. L'axe passe au milieu des racines :
   $\dfrac{-1 + 3}{2} = 1$
   axe d'équation $x = 1$.
3. L'ordonnée du sommet est l'image de 1 :
   $f(1) = (1 + 1) \times (1 - 3) = -4$

Racines -1 et 3, axe $x = 1$, sommet $S(1\,;\,-4)$; comme $a = 1 > 0$, -4 est le minimum de f.

DRESSER LE TABLEAU DE SIGNES D'UNE FORME FACTORISÉE

1. **Une ligne par facteur du premier degré** : $x - x_1$ est négatif avant x_1, nul en x_1, positif après.
2. **Le signe de a** : si a est négatif, il faut une ligne de plus, toujours « $-$ ».
3. **La ligne du produit** : règle des signes, colonne par colonne ; un 0 sous chaque racine.

x	$-\infty$		-1		3	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de signes de $(x + 1)(x - 3)$: positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

RÈGLE

Le signe de $a(x-x_1)(x-x_2)$, avec $x_1 < x_2$: celui de a à l'extérieur des racines, le signe contraire entre elles. Le tableau de signes le démontre : $(x-x_1)(x-x_2)$ est négatif entre les racines et positif à l'extérieur ; a fait le reste.

PIÈGE

Annoncer que les racines de $2(x+3)(x-1)$ sont 3 et -1. — $x+3=0$ donne $x=-3$: la racine **annule** le facteur. Avec 3, on obtient $2\times 6\times 2=24\neq 0$.

Ce que ça coûte : les racines, l'axe, le signe : toute la question

Le réflexe : remplacer x par la racine trouvée dans l'expression : on doit obtenir 0.

PIÈGE

Écrire que $-2(x-1)(x-5)$ est positif à l'extérieur des racines, en oubliant le -2. — $a=-2$ **inverse** tous les signes de $(x-1)(x-5)$: la parabole est tournée vers le bas, positive seulement entre 1 et 5.

Ce que ça coûte : la dernière ligne du tableau, et l'inéquation qui en dépend

Le réflexe : regarder a en premier, et vérifier le tableau avec l'orientation de la parabole.

Il n'y a pas toujours de racine : $x^2+1\geq 1$ ne s'annule jamais. Ici, les racines se lisent sur une forme factorisée, donnée ou obtenue en mettant x en facteur.

3 Forme développée : l'axe sans formule

TROUVER L'AXE ET LE SOMMET EN RÉSOLVANT F(X) = C

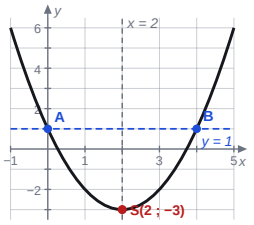
1. **Lire** $c=f(0)$: le point $(0\,;\,c)$ est sur la parabole.
2. **Résoudre** $f(x)=c$: $ax^2+bx+c=c \iff ax^2+bx=0 \iff x(ax+b)=0$: deux solutions, dont 0.
3. **Prendre le milieu** des deux solutions : c'est l'abscisse de l'axe, donc du sommet ; son **image** est l'ordonnée du sommet.

EXEMPLE

Déterminer le sommet de la parabole de $f(x)=x^2-4x+1$, puis le tableau de variation de f.

1. $f(0)=1$. On résout $f(x)=1$: $x^2-4x=0 \iff x(x-4)=0 \iff x=0$ ou $x=4$.
2. Les points $A(0\,;\,1)$ et $B(4\,;\,1)$ ont la même ordonnée ; l'axe passe au milieu : $\dfrac{0+4}{2}=2$
3. Ordonnée du sommet, un minimum car $a=1>0$: $f(2)=2^2-4\times 2+1=-3$

Sommet $S(2\,;\,-3)$; f est décroissante sur $]-\infty\,;\,2]$, croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.



A et B ont la même ordonnée 1 : l'axe $x=2$ passe à mi-chemin.

RÈGLE

Variations (admis) : si $a>0$, f est décroissante puis croissante, et le sommet donne son **minimum** ; si $a<0$, f est croissante puis décroissante, et le sommet donne son **maximum**. Le sens change à l'abscisse du sommet.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-3	↗

Tableau de variation de $f(x)=x^2-4x+1$: une seule valeur à calculer, $f(2)=-3$.

RÉSOUDRE GRAPHIQUEMENT F(X) = K OU F(X) < K

1. **Tracer la droite horizontale** d'équation $y=k$.
2. **Pour $f(x)=k$** : lire les **abscisses** des points d'intersection avec la parabole. Il y en a deux, une seule (au sommet) ou aucune.
3. **Pour $f(x)<k$** : garder les abscisses des points de la courbe situés **sous** la droite ; bornes exclues pour $<$, incluses pour $\leq$.
4. **Sur la figure de $f(x)=x^2-4x+1$: $f(x)\leq 1 \iff x\in[0\,;\,4]$; $f(x)=-3 \iff x=2$; $f(x)=-4$** n'a pas de solution, car -4 est sous le minimum.

PIÈGE

Prendre $(0\,;\,c)$ pour le sommet de la parabole de x^2-4x+1, c'est-à-dire $(0\,;\,1)$. — $(0\,;\,c)$ n'est le sommet que si $b=0$. Ici, $f(2)=-3<1$: $(0\,;\,1)$ n'est pas le plus bas.

Ce que ça coûte : le sommet et le tableau de variation

Le réflexe : résoudre $f(x)=c$: si la seconde solution n'est pas 0, le sommet n'est pas sur l'axe des ordonnées.

PIÈGE

Répondre « $f(x)\leq 1$ pour y entre -3 et 1 ». — les solutions d'une inéquation en x sont des **valeurs de** x, lues sur l'axe des abscisses.

Ce que ça coûte : la réponse entière, même si la lecture était juste

Le réflexe : projeter les points d'intersection verticalement sur l'axe des abscisses avant de conclure.

4 Modéliser une situation

EXPLOITER UN MODÈLE QUADRATIQUE

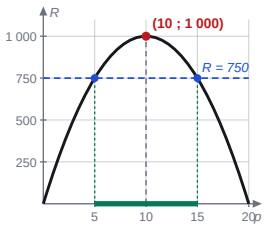
1. **Nommer la variable, son unité, et le domaine de validité du modèle** : une demande positive, un temps entre le lancer et la chute, une population sur une durée restreinte.
2. **Traduire la question** : « maximum », « minimum » → le sommet ; « s'annule », « touche le sol » → les racines ; « au moins k » → l'inéquation $f(x)\geq k$.
3. **Calculer, puis répondre par une phrase avec l'unité** : l'abscisse du sommet dit **quand** ou **à quel prix**, son ordonnée dit **combien**.

EXEMPLE

Un artisan vend $q(p)=200-10p$ objets par mois au prix unitaire de p euros, avec $0\leq p\leq 20$. Son chiffre d'affaires est $R(p)=p(200-10p)=-10p(p-20)$. Quel prix le rend maximal ? Pour quels prix atteint-il au moins 750 € ?

1. Les racines de R sont 0 et 20 : à 0 €, ou à 20 € (plus aucun acheteur), le chiffre d'affaires est nul. L'axe passe au milieu :
$$\frac{0+20}{2}=10$$
2. Ordonnée du sommet, maximum car $a=-10<0$:
$$R(10)=-10\times 10\times(10-20)=1000$$
3. En développant, $R(p)-750=-10p^2+200p-750=-10(p-5)(p-15)$. Comme $a=-10<0$, cette expression est positive ou nulle entre ses racines 5 et 15.
$$R(5)=5\times 150=750$$

Le chiffre d'affaires est maximal, 1 000 €, pour un prix de 10 € ; il atteint au moins 750 € pour un prix compris entre 5 € et 15 €.



Le sommet répond à « combien au plus ? » ; la droite $R=750$, à « pour quels prix ? ».

PIÈGE

À la question « quel est le chiffre d'affaires maximal ? », répondre « 10 € ». — 10 € est l'**abscisse** du sommet, le prix ; le maximum est l'**ordonnée**, $R(10)=1\,000$ €.

Ce que ça coûte : la réponse au problème, alors que tout le calcul était juste

Le réflexe : relire la question : « pour quel prix ? » appelle l'abscisse, « combien ? » appelle l'ordonnée.

À VÉRIFIER

- Ai-je lu le **signe de** a avant tout : tournée vers le haut ou vers le bas ?
- Mes racines **annulent-elles** vraiment chaque facteur, signes compris ?
- Ai-je trouvé l'axe au **milieu de deux points de même ordonnée** : racines, ou solutions de $f(x)=c$?
- Pour un signe, ai-je intégré le **facteur** a dans le tableau ?

À RETENIR

- Parabole de $x\mapsto ax^2+c$: sommet $(0\,;\,c)$, tournée vers le haut si $a>0$, vers le bas si $a<0$.
- $a(x-x_1)(x-x_2)=0 \iff x=x_1$ ou $x=x_2$: la racine **annule** le facteur.
- **Axe de symétrie** : au milieu de deux points de même ordonnée — les racines, ou les solutions de $f(x)=c$.
- **Sommet** : son ordonnée est l'image de l'abscisse de l'axe ; minimum si $a>0$, maximum si $a<0$.
- **Signe** de $a(x-x_1)(x-x_2)$: celui de a à l'extérieur des racines, le contraire entre elles.
- En contexte : « combien au plus ? » → l'ordonnée du sommet ; « quand ? », « à quel prix ? » → son abscisse.