CORRIGÉ

Arbres pondérés — Probabilités conditionnelles et indépendance

1re
Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Lire un tableau croisé

1. a. Par différences : $120 - 90 = 30$ membres d'un club non demi-pensionnaires ; $240 - 90 = 150$ demi-pensionnaires hors club ; $400 - 120 = 280$ élèves hors club ; $400 - 240 = 160$ non demi-pensionnaires ; enfin $280 - 150 = 130$.
   $30 + 130 = 160$
   contrôle : la colonne $\overline{D}$ totalise bien 160.
2. b. « C et D » : on divise par l'effectif total.
   $P(C \cap D) = \frac{90}{400} = 0{,}225$
3. « Sachant C » : on ne garde que les 120 membres d'un club.
   $P_C(D) = \frac{90}{120} = 0{,}75$
4. « Sachant D » : on ne garde que les 240 demi-pensionnaires.
   $P_D(C) = \frac{90}{240} = 0{,}375$
5. c. La condition est « être demi-pensionnaire » : c'est $P_D(C) = 0{,}375$. **37,5 % des demi-pensionnaires font partie d'un club.**

2 Compléter et exploiter un arbre

1. a. Premier niveau : $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Si Léa connaît la réponse, elle répond juste : $P_C(J) = 1$ et $P_C(\overline{J}) = 0$.
2. Au hasard parmi 4 réponses dont une juste : $P_{\overline{C}}(J) = \frac{1}{4} = 0{,}25$, et $P_{\overline{C}}(\overline{J})$ complète à 1.
   $1 - 0{,}25 = 0{,}75$
3. b. Chemin C puis J :
   $P(C \cap J) = 0{,}6 \times 1 = 0{,}6$
4. J est au bout de deux chemins : on additionne.
   $P(J) = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}7$
5. c. On cherche $P_J(C)$:
   $P_J(C) = \frac{0{,}6}{0{,}7} \approx 0{,}857$
   sachant qu'elle a répondu juste, Léa connaissait la réponse avec une probabilité d'environ 0,86.

3 Vrai ou faux ? Justifier.

1. a. **Vrai.** Les branches d'un nœud décrivent toutes les issues possibles à cet endroit, sans chevauchement : leurs probabilités totalisent 1.
2. b. **Faux.** Au dépistage du cours, $P_M(T) = 0{,}95$ mais $P_T(M) \approx 0{,}16$.
3. c. **Faux.** Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$, alors que $P(A) \times P(B) > 0$. Le produit n'est pas égal à $P(A \cap B)$.
4. d. **Faux.** Les lancers sont indépendants : au sixième, « face » a toujours la probabilité $\frac{1}{2}$.
5. e. **Vrai.** $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, et multiplier par $P(A) \leq 1$ ne peut pas agrandir $P_A(B)$.

4 Dépistage : faux positifs et faux négatifs

1. a. Premier niveau : $P(M) = 0{,}05$ et $P(\overline{M}) = 0{,}95$. Second niveau : $P_M(T) = 0{,}98$, $P_M(\overline{T}) = 0{,}02$; $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}03$, $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}97$.
2. b. Faux négatif : malade **et** test négatif.
   $P(M \cap \overline{T}) = 0{,}05 \times 0{,}02 = 0{,}001$
3. Faux positif : non malade **et** test positif.
   $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}95 \times 0{,}03 = 0{,}0285$
4. c. On additionne les deux chemins qui mènent à T.
   $P(T) = 0{,}05 \times 0{,}98 + 0{,}0285 = 0{,}049 + 0{,}0285 = 0{,}0775$
5. d. On revient à la définition.
   $P_T(M) = \frac{0{,}049}{0{,}0775} \approx 0{,}632$
6. Environ 37 % des positifs ne sont donc pas malades. **Un test positif ne suffit pas : il faut un second examen pour confirmer.**

5 Indépendants ou non ?

1. a. 75 gauchers sur 500 :
   $P(G) = \frac{75}{500} = 0{,}15$
2. 200 porteurs de lunettes sur 500 :
   $P(L) = \frac{200}{500} = 0{,}4$
3. 30 gauchers à lunettes sur 500 :
   $P(G \cap L) = \frac{30}{500} = 0{,}06$
4. b. On compare au produit.
   $P(G) \times P(L) = 0{,}15 \times 0{,}4 = 0{,}06$
   $P(G \cap L) = P(G) \times P(L)$: **G et L sont indépendants.**
5. c. Parmi les 200 porteurs de lunettes, 30 sont gauchers.
   $P_L(G) = \frac{30}{200} = 0{,}15$
   $P_L(G) = P(G)$: la part de gauchers est la même chez les porteurs de lunettes que dans tout le groupe.

6 Repérer l'erreur : le « croix ou pile » de d'Alembert

1. a. Les trois cas ne sont **pas équiprobables** : « croix » au premier lancer a la probabilité $\frac{1}{2}$, chacun des deux autres $\frac{1}{4}$. Compter des cas ne vaut que s'ils ont la même probabilité.
2. b. Arbre : au premier lancer, croix $\frac{1}{2}$ (gagné, fin) ou pile $\frac{1}{2}$; après pile, croix $\frac{1}{2}$ ou pile $\frac{1}{2}$. Deux chemins gagnants :
   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
3. c. On ne perd qu'avec pile puis pile :
   $1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
4. **On gagne avec la probabilité $\frac{3}{4}$, et non $\frac{2}{3}$.**

7 Le jeu du lièvre et de la tortue

1. a. Chaque lancer a deux issues : succès « le 6 sort », $p = \frac{1}{6}$, ou échec, de probabilité $\frac{5}{6}$. Les lancers sont identiques (même dé) et indépendants (le dé n'a pas de mémoire) ; on peut imaginer les quatre lancers faits, même si le jeu s'arrête avant.
2. b. La tortue gagne sur un seul chemin, quatre échecs :
   $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1\,296} \approx 0{,}482$
3. Le lièvre gagne dans tous les autres cas :
   $1 - \frac{625}{1\,296} = \frac{671}{1\,296} \approx 0{,}518$
   le lièvre est un peu favorisé : le jeu n'est pas tout à fait équitable.
4. c. Avec 3 cases, la tortue gagne avec la probabilité :
   $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0{,}579$
   la tortue est alors favorisée.
5. Chaque case de plus multiplie la chance de la tortue par $\frac{5}{6}$: environ 0,579 pour 3 cases, 0,482 pour 4, 0,402 pour 5. **C'est avec 4 cases que l'on est le plus près de $\frac{1}{2}$: le jeu le plus équitable.**

8 La stratégie gagnante de Monty Hall

1. a. Une porte sur trois, choisie au hasard : la probabilité vaut $\frac{1}{3}$.
2. b. En gardant sa porte, il gagne exactement quand la première porte cache la voiture : probabilité $\frac{1}{3}$.
3. c. Premier niveau : voiture $\frac{1}{3}$, chèvre $\frac{2}{3}$. Voiture : changer fait perdre à coup sûr, branche « gagne » de probabilité 0. Chèvre : le présentateur ouvre l'autre chèvre, la porte restante cache la voiture, branche « gagne » de probabilité 1.
4. On additionne les chemins gagnants :
$\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$
5. **Changer de porte double la probabilité de gagner : $\frac{2}{3}$ contre $\frac{1}{3}$.** C'est la stratégie gagnante, dans le modèle où le présentateur ouvre toujours une porte à chèvre.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Traduire l'énoncé : « et » en $P(A \cap B)$, « parmi » ou « sachant » en $P_A(B)$	3 pts	Échanger la condition ($P_M(T)$ pour $P_T(M)$) ; diviser par le mauvais effectif dans un tableau croisé
Construire un arbre pondéré complet et cohérent	4 pts	Branches d'un nœud dont la somme ne vaut pas 1 ; probabilité d'un chemin écrite sur une branche
Calculer une probabilité en multipliant le long des chemins et en additionnant les chemins	3 pts	Un chemin oublié ; additionner le long d'un chemin ou multiplier deux chemins
Calculer une probabilité « à l'envers » par la définition, et l'interpréter	4 pts	Répondre $P_M(T)$ au lieu de $P_T(M)$; un nombre sans phrase de conclusion
Justifier l'indépendance par un calcul exact	3 pts	Confondre indépendants et incompatibles ; conclure sur des valeurs arrondies ou « proches »
Répétition de Bernoulli : justifier « identiques et indépendantes », compter tous les chemins	3 pts	Additionner $3 \times \frac{1}{6}$ pour « au moins un » ; oublier des chemins à k succès