1re

COURS

Arbres pondérés — Probabilités conditionnelles et indépendance

Programme de mathématiques intégré à l'enseignement scientifique de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602916A

Un test peut détecter 95 % des malades et, pourtant, la plupart des personnes dont le test est positif peuvent ne pas être malades. Tout tient dans une phrase : $P_A(B)$**, la probabilité de** B **sachant** A**, se calcule parmi les seuls cas où** A **est réalisé — ce n'est ni** $P(A \cap B)$**, ni** $P_B(A)$**.** Tableau croisé et arbre pondéré servent à ne pas les confondre, puis à étudier l'indépendance et la répétition d'une expérience.

1 Probabilité conditionnelle et tableau croisé

DÉFINITION

Pour deux évènements A et B, l'évènement $A \cap B$ (« A **et** B ») est réalisé quand les deux le sont ; le **contraire** $\overline{A}$ est réalisé quand A ne l'est pas, et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Quand on choisit **au hasard** un individu dans un effectif de N, les issues sont équiprobables : $P(A)$ est l'effectif de A divisé par N.

DÉFINITION

Soit A et B deux évènements, avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de** B **sachant** A est la probabilité que B soit réalisé **quand on sait que** A **l'est**. On la note $P_A(B)$ et on la définit par la formule ci-dessous. Elle se lit « **parmi les** A**, la part des** B » : on ne regarde plus que les cas où A est réalisé.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

PROPRIÉTÉ

Conséquence (démontrée) : en multipliant les deux membres de la définition par $P(A)$, on obtient la formule ci-dessous, qui sert à calculer une intersection. Dans un **tableau croisé**, si l'individu est choisi au hasard, les deux quotients par N se simplifient : $P_A(B)$ est l'effectif de $A \cap B$ **divisé par l'effectif de** A.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

LIRE UNE PROBABILITÉ DANS UN TABLEAU CROISÉ

1. **Traduire la question.** « A et B », « à la fois » : c'est $P(A \cap B)$, on divise par l'effectif **total**. « Parmi les A », « sachant A », « si A » : c'est $P_A(B)$, on divise par l'effectif de A.
2. **Repérer la case** de $A \cap B$, au croisement de la ligne et de la colonne.
3. **Diviser par le bon total** : celui de toute la population, ou celui de la seule ligne, ou de la seule colonne, de la condition.

sachant M : on ne garde que la ligne M

	T	$\overline{\text{T}}$	Total
M	190	10	200
$\overline{\text{M}}$	980	8 820	9 800
Total	1 170	8 830	10 000

$P_M(T) = 190 / 200 = 0{,}95$

sachant T : on ne garde que la colonne T

	T	$\overline{\text{T}}$	Total
M	190	10	200
$\overline{\text{M}}$	980	8 820	9 800
Total	1 170	8 830	10 000

$P_T(M) = 190 / 1\,170 \approx 0{,}162$

Le même tableau, deux conditions : la ligne M (200 malades) pour $P_M(T)$, la colonne T (1 170 positifs) pour $P_T(M)$. Le numérateur est le même, 190 ; le dénominateur change tout.

EXEMPLE

Sur 10 000 personnes, 2 % ont une maladie (M). Un test est positif (T) chez 95 % des malades et chez 10 % des non-malades. On en tire le tableau ci-dessus. On choisit une personne au hasard : calculer $P(M \cap T)$, $P_M(T)$ et $P_T(M)$.

1. On remplit le tableau : $0{,}02 \times 10\,000 = 200$ malades, dont 95 % positifs, et $0{,}10 \times 9\,800 = 980$ non-malades positifs. $0{,}95 \times 200 = 190$
2. « M et T » : on divise par l'effectif total. $P(M \cap T) = \frac{190}{10\,000} = 0{,}019$
3. « Sachant M » : on ne garde que la ligne des 200 malades. $P_M(T) = \frac{190}{200} = 0{,}95$
4. « Sachant T » : on ne garde que la colonne des 1 170 positifs. $P_T(M) = \frac{190}{1\,170} \approx 0{,}162$

$P(M \cap T) = 0{,}019$ et $P_M(T) = 0{,}95$, mais $P_T(M) \approx 0{,}16$: seuls 16 % environ des positifs sont malades.

PIÈGE

Calculer la probabilité d'être « malade et positif » par $\frac{190}{200}$. — « et » ne restreint rien : on compte les malades positifs parmi **toute** la population, $\frac{190}{10\,000}$. Diviser par 200, c'est calculer $P_M(T)$.

Ce que ça coûte : le résultat, cinquante fois trop grand.

Le réflexe : « et » : effectif total au dénominateur ; « parmi » : effectif de la condition.

2 L'arbre pondéré

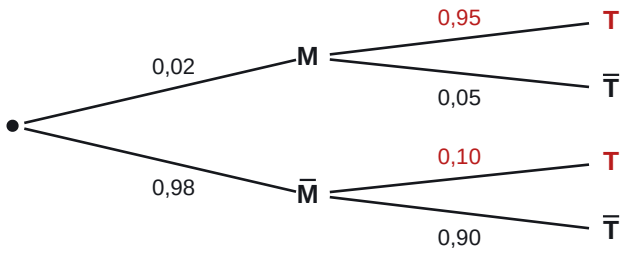
RÈGLE

Un **arbre pondéré** décrit une situation en deux temps. Le **premier niveau** porte $P(A)$ et $P(\overline{A})$; le **second**, les probabilités **conditionnelles** $P_A(B)$, $P_A(\overline{B})$, $P_{\overline{A}}(B)$, $P_{\overline{A}}(\overline{B})$. Trois règles l'exploitent. **1.** Les branches issues d'un même nœud ont des probabilités de **somme 1**. **2.** La probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités de ses branches : c'est $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. **3.** La probabilité d'un **évènement** est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent : B est réalisé par $A \cap B$ ou par $\overline{A} \cap B$, qui ne peuvent pas se produire ensemble, donc leurs probabilités s'ajoutent.

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

DÉFINITION

Pour un test de dépistage, un **faux positif** est une personne **non malade** dont le test est positif : c'est l'évènement $\overline{M} \cap T$. Un **faux négatif** est une personne **malade** dont le test est négatif : $M \cap \overline{T}$.



un chemin : on multiplie	
0,02 × 0,95 = 0,019	malade, positif
0,02 × 0,05 = 0,001	faux négatif
0,98 × 0,10 = 0,098	faux positif
0,98 × 0,90 = 0,882	non malade, négatif

somme des quatre chemins : 0,019 + 0,001 + 0,098 + 0,882 = 1

La situation du tableau croisé, en arbre. Les deux chemins rouges mènent à T : $P(T) = 0{,}019 + 0{,}098 = 0{,}117$.

CONSTRUIRE ET EXPLOITER UN ARBRE PONDÉRÉ

1. **Choisir le premier niveau** : l'évènement dont l'énoncé donne la probabilité **sans condition** (« 2 % de la population est malade »).
2. **Traduire chaque « parmi »** en probabilité conditionnelle, au second niveau : « 95 % des malades ont un test positif » donne $P_M(T) = 0{,}95$. Compléter chaque nœud pour que ses branches totalisent 1.
3. **Multiplier** le long d'un chemin ; **additionner** les chemins qui mènent à l'évènement cherché.
4. **Pour une probabilité « à l'envers »**, comme $P_T(M)$ quand l'arbre commence par M, revenir à la définition : $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$.

EXEMPLE

Avec l'arbre ci-dessus, où $P(M) = 0{,}02$, $P_M(T) = 0{,}95$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}10$, calculer $P(T)$, puis $P_T(M)$.

1. T est au bout de deux chemins, « malade et positif » et « non malade et positif » (les faux positifs). On multiplie le long de chacun, puis on additionne.
   $P(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}10 = 0{,}019 + 0{,}098 = 0{,}117$
2. On revient à la définition ; on retrouve le résultat du tableau croisé.
   $P_T(M) = \frac{0{,}019}{0{,}117} \approx 0{,}162$

$P(T) = 0{,}117$ et $P_T(M) \approx 0{,}16$: environ un positif sur six est malade, car les faux positifs, tirés de 98 % de la population, sont environ cinq fois plus nombreux que les vrais.

PIÈGE

Répondre $0{,}95$ à la question « le test d'une personne est positif : quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? ». — ce que l'on **sait**, c'est « test positif » : la réponse est $P_T(M) \approx 0{,}16$. $P_M(T)$ et $P_T(M)$ n'ont ni le même sens, ni la même valeur.

Ce que ça coûte : toute la question, et la conclusion du problème avec elle.

Le réflexe : souligner la condition (« sachant », « parmi », « si ») : elle va en indice, en bas du P.

PIÈGE

Écrire $0{,}019$ sur la branche qui va de M à T. — une branche du second niveau porte une probabilité **conditionnelle**, ici $P_M(T) = 0{,}95$; $0{,}019$ est la probabilité du **chemin** entier.

Ce que ça coûte : l'arbre, et tous les calculs faits dessus.

Le réflexe : vérifier qu'à chaque nœud les branches totalisent 1.

PIÈGE

Multiplier deux chemins, ou additionner le long d'un chemin : $P(T) = 0{,}019 \times 0{,}098$. — le long d'un chemin, on a « ceci **et** cela » : on multiplie. Entre deux chemins, c'est « l'un **ou** l'autre » : on additionne.

Ce que ça coûte : la probabilité, et toutes celles qui en dépendent.

Le réflexe : × le long d'un chemin, + entre les chemins ; une probabilité supérieure à 1 signale toujours une erreur.

3 Évènements indépendants

DÉFINITION

Soit A et B deux évènements, avec $P(B) \neq 0$. A et B sont **indépendants** si $P_B(A) = P(A)$: savoir que B est réalisé **ne change pas** la probabilité de A.

PROPRIÉTÉ

Propriété (démontrée). Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, ces trois égalités sont équivalentes : $P_B(A) = P(A)$; $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; $P_A(B) = P(B)$. **Démonstration** : $P_B(A) = P(A)$ s'écrit $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, soit, en multipliant par $P(B) \neq 0$, l'égalité ci-dessous. Elle ne change pas si l'on échange A et B ; divisée par $P(A) \neq 0$, elle donne $P_A(B) = P(B)$. L'indépendance est donc **symétrique**.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

JUSTIFIER OU UTILISER L'INDÉPENDANCE

1. **Pour justifier**, calculer séparément $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$, en valeurs **exactes**, puis comparer. Égales : A et B sont indépendants. Différentes : ils ne le sont pas.
2. **Ou bien** comparer $P_B(A)$ à $P(A)$: c'est la définition, et souvent le calcul le plus parlant.
3. **Pour utiliser** l'indépendance, quand l'énoncé la donne ou que la situation l'impose (lancers successifs, tirages **avec remise**), multiplier : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. C'est une **hypothèse du modèle** : on l'écrit.

EXEMPLE

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes : 4 couleurs de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). A : « c'est un cœur » ; B : « c'est un as ». A et B sont-ils indépendants ?

1. 8 cœurs, 4 as, et un seul as de cœur : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$. On compare au produit :
   $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$
   par la définition : parmi les 4 as, un seul est un cœur, donc $P_B(A) = \frac{1}{4} = P(A)$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$: A et B sont indépendants. Savoir que la carte est un as n'apprend rien sur sa couleur.

PIÈGE

Dire que deux évènements incompatibles sont indépendants, « puisqu'ils n'ont rien en commun ». — c'est le contraire. Avec B : « as » et C : « figure » (valet, dame, roi), $P(B \cap C) = 0$ alors que $P(B) \times P(C) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{8} \neq 0$. Savoir que la carte est un as apprend qu'elle n'est **pas** une figure.

Ce que ça coûte : la conclusion, et sa justification.

Le réflexe : incompatibles : $P(A \cap B) = 0$; indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Deux notions, deux calculs.

4 Répéter une épreuve de Bernoulli

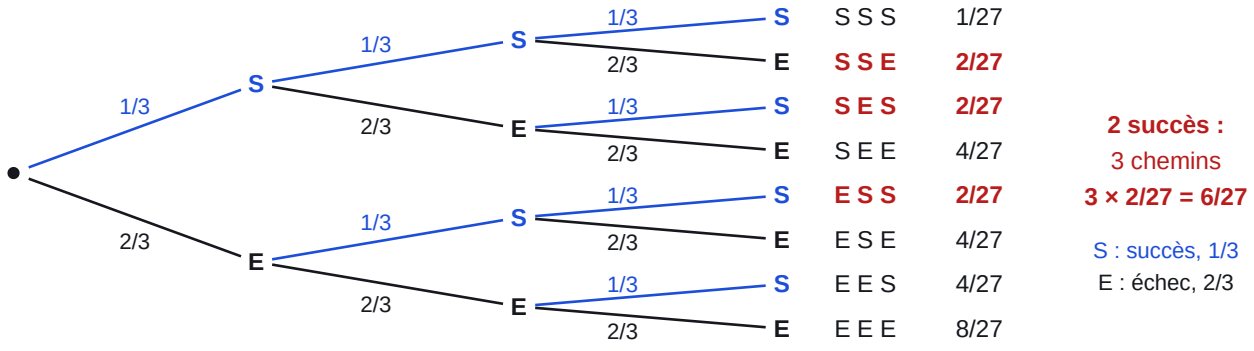
DÉFINITION

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à **deux issues** : le **succès** S, de probabilité p, et l'**échec** E (noté aussi $\overline{S}$), de probabilité $1 - p$. On **répète** n fois la même épreuve, de façon **identique** (même p à chaque fois) et **indépendante** (aucun résultat n'influe sur les autres) : lancers successifs d'une pièce ou d'un dé, tirages **avec remise** dans une urne.

PROPRIÉTÉ

Propriété (admise). Dans l'arbre de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, chaque niveau répète les mêmes branches : p vers S, $1 - p$ vers E. Un chemin de k succès et $n - k$ échecs a pour probabilité le produit ci-dessous, **quel que soit l'ordre** des succès. Pour « exactement k succès », on **compte** ces chemins sur l'arbre ($n \leq 4$) et l'on additionne.

$$p^k \times (1-p)^{n-k}$$



Trois épreuves identiques et indépendantes, $p = \frac{1}{3}$: huit chemins, de somme $\frac{27}{27} = 1$. Les trois chemins à deux succès ont la même probabilité $\frac{2}{27}$.

CALCULER AVEC N ÉPREUVES DE BERNOULLI

1. **Identifier** l'épreuve, le succès, sa probabilité p et le nombre n de répétitions ; **justifier** qu'elles sont identiques et indépendantes.
2. **Dessiner l'arbre** ($n \leq 4$, soit au plus 16 chemins) et repérer les chemins qui réalisent l'évènement.
3. **Additionner** leurs probabilités : tous les chemins à k succès ont la même.
4. **Pour « au moins un succès »**, passer par le contraire, « aucun succès », qui ne compte qu'un chemin : $1 - (1-p)^n$.

EXEMPLE

On joue trois parties de pierre-feuille-ciseaux contre un adversaire qui joue au hasard, sans tenir compte des parties précédentes. Quel que soit notre coup, un seul de ses trois coups nous fait gagner. Probabilité de gagner exactement deux parties ? au moins une ?

1. Succès : « gagner la partie », $p = \frac{1}{3}$; trois épreuves identiques et indépendantes. Deux succès, un échec : trois chemins, SSE, SES et ESS, chacun de probabilité : $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$
2. On additionne les trois chemins. $3 \times \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$
3. « Au moins une victoire » est le contraire du seul chemin EEE. $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \approx 0{,}704$

deux victoires exactement avec la probabilité $\frac{2}{9} \approx 0{,}22$; au moins une avec $\frac{19}{27} \approx 0{,}70$.

PIÈGE

Tirer deux boules sans remise et multiplier comme si les tirages étaient indépendants. — après le premier tirage, l'urne a changé. Avec 3 rouges et 2 noires, $P(\text{deux rouges}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, et non $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

Ce que ça coûte : le résultat, et l'hypothèse d'indépendance, fausse.

Le réflexe : avec remise : mêmes probabilités à chaque tirage ; sans remise : arbre pondéré, avec des probabilités conditionnelles qui changent.

PIÈGE

« Au moins un 6 en trois lancers de dé : $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. » — « 6 au 1er lancer », « 6 au 2e », « 6 au 3e » peuvent se produire ensemble : on ne peut pas additionner leurs probabilités. Avec six lancers, ce calcul donnerait 1, une certitude absurde.

Ce que ça coûte : le résultat, et la méthode.

Le réflexe : passer par le contraire : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 0{,}42$.

PIÈGE

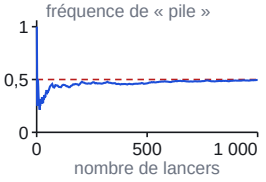
Après cinq « pile » de suite, parier sur « face » : « il doit finir par sortir ». — les lancers sont indépendants : la pièce n'a pas de mémoire. Au sixième lancer, « face » a toujours la probabilité $\frac{1}{2}$.

Ce que ça coûte : la justification, et la conclusion.

Le réflexe : dans une répétition indépendante, chaque niveau de l'arbre porte les **mêmes** probabilités, quel que soit le chemin déjà parcouru.

Modèle et réalité. Une loi de probabilité est une **hypothèse** du modèle, elle ne se démontre pas : on **suppose** une pièce équilibrée, par symétrie. Le lien avec la réalité est la **loi des grands nombres**, ici dans une version simplifiée : quand on répète une expérience un **grand nombre** de fois, de façon indépendante, la **fréquence** observée d'un évènement se rapproche de sa **probabilité**. Une simulation (lancers de pièce, tirages avec remise dans une urne) le montre : la fréquence fluctue, puis se stabilise.

Ce calcul des chances est né au XVIIe siècle, dans les lettres de Pascal et Fermat sur le partage équitable des mises d'une partie interrompue : le « problème des partis ».



Une simulation de 1 000 lancers d'une pièce équilibrée : la fréquence de « pile » se stabilise autour de $0{,}5$.

À VÉRIFIER

- Ai-je souligné la **condition** (« sachant », « parmi », « si ») pour choisir entre $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$?
- Mon arbre a-t-il des branches de somme **1** à chaque nœud, et des probabilités **conditionnelles** au second niveau ?
- Ai-je justifié l'indépendance par un **calcul exact**, sans la confondre avec l'incompatibilité ?
- Pour une répétition, ai-je dit pourquoi les épreuves sont **identiques et indépendantes**, et compté **tous** les chemins ?

À RETENIR

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: « parmi les A, la part des B ».
- $P(A \cap B)$ se calcule sur **tout** l'effectif ; $P_A(B)$ parmi les A ; $P_B(A)$ parmi les B. Trois nombres différents.
- Arbre pondéré : somme **1** à chaque nœud ; on **multiplie** le long d'un chemin ; on **additionne** les chemins d'un évènement.
- Indépendants : $P_B(A) = P(A)$, ou $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Incompatibles n'est pas indépendants.
- n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes : un chemin à k succès vaut $p^k(1-p)^{n-k}$; « au moins un succès » vaut $1 - (1-p)^n$.
- Une loi de probabilité est une hypothèse du modèle ; sur un grand nombre d'essais, la fréquence se rapproche de la probabilité.