EXERCICES

Arbres pondérés — Probabilités conditionnelles et indépendance

1re

Nom : _____
Classe : _____

Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 Lire un tableau croisé

●○○

a. On interroge les 400 élèves de première d'un lycée. 120 font partie d'un club (C), dont 90 sont demi-pensionnaires (D) ; il y a 240 demi-pensionnaires en tout. Compléter le tableau ci-contre.

b. On choisit un élève au hasard. Calculer $P(C \cap D)$, $P_C(D)$ et $P_D(C)$.

c. Laquelle de ces trois probabilités répond à la question « parmi les demi-pensionnaires, quelle part fait partie d'un club ? » ?

	D	$\overline{D}$	Total
C	90	…	120
$\overline{C}$	…	…	…
Total	240	…	400

Effectifs des 400 élèves.

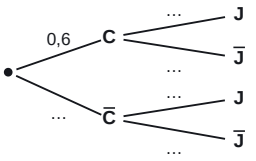
2 Compléter et exploiter un arbre

●○○

a. Chaque question d'un QCM propose 4 réponses, dont une seule est juste. Léa connaît la réponse à 60 % des questions (C) ; elle répond alors juste (J). Sinon, elle répond au hasard. Compléter l'arbre ci-contre.

b. Calculer $P(C \cap J)$, puis $P(J)$.

c. Léa a répondu juste. Quelle est la probabilité qu'elle connaissait la réponse ?



$P(C) = 0{,}6$ *; le reste est à compléter.*

3 Vrai ou faux ? Justifier. ●●○

a. Dans un arbre pondéré, les branches issues d'un même nœud ont des probabilités de somme 1.

b. Pour tous évènements A et B de probabilités non nulles, $P_A(B) = P_B(A)$.

c. Deux évènements incompatibles, de probabilités non nulles, sont indépendants.

d. Après cinq « pile » de suite avec une pièce équilibrée, « face » a plus d'une chance sur deux de sortir.

e. Si $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) \leq P_A(B)$.

Énoncé	Ta réponse	Pourquoi ?
a. Dans un arbre pondéré, les branches issues d'un même nœud ont des probabilités de somme 1.		
b. Pour tous évènements A et B de probabilités non nulles, $P_A(B) = P_B(A)$.		
c. Deux évènements incompatibles, de probabilités non nulles, sont indépendants.		
d. Après cinq « pile » de suite avec une pièce équilibrée, « face » a plus d'une chance sur deux de sortir.		
e. Si $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) \leq P_A(B)$.		

4 Dépistage : faux positifs et faux négatifs ●●○

a. Une maladie touche 5 % d'une population. Un test est positif chez 98 % des malades et chez 3 % des non-malades. On choisit une personne au hasard ; M : « elle est malade », T : « son test est positif ». Construire l'arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que la personne soit un faux négatif, puis un faux positif.

c. Calculer $P(T)$.

d. Le test d'une personne est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? Ce test suffit-il à poser le diagnostic ?

5 Indépendants ou non ? ●●○

a. Dans un groupe de 500 personnes, on note G : « être gaucher » et L : « porter des lunettes ». Le tableau ci-contre donne les effectifs. On choisit une personne au hasard : calculer $P(G)$, $P(L)$ et $P(G \cap L)$.

b. G et L sont-ils indépendants ? Justifier.

c. Calculer $P_L(G)$ et interpréter le résultat.

	L	$\overline{\text{L}}$	Total
G	30	45	75
$\overline{\text{G}}$	170	255	425
Total	200	300	500

Effectifs des 500 personnes.

6 Repérer l'erreur : le « croix ou pile » de d'Alembert ●●○

a. On lance une pièce équilibrée ; on gagne si « croix » sort, avec deux lancers au plus (on s'arrête dès que « croix » sort). Au XVIII^{e} siècle, d'Alembert raisonnait ainsi : « Trois cas : croix ; pile puis croix ; pile puis pile. Deux sont gagnants : on gagne avec la probabilité $\frac{2}{3}$. » Où est l'erreur ?

b. Représenter la situation par un arbre pondéré et calculer la probabilité de gagner.

c. Retrouver ce résultat à l'aide de l'évènement contraire.

7 Le jeu du lièvre et de la tortue ●●●

a. On lance un dé équilibré. Si le 6 sort, le lièvre gagne et le jeu s'arrête ; sinon, la tortue avance d'une case. La tortue gagne si elle atteint la case 4, c'est-à-dire si le 6 ne sort à aucun des quatre premiers lancers. Justifier qu'on répète une épreuve de Bernoulli, et donner p.

b. Calculer la probabilité que la tortue gagne, puis celle que le lièvre gagne. Le jeu est-il équitable ?

c. Avec une course de 3 cases, qui est favorisé ? Quelle longueur de course rend le jeu le plus équitable ?

8 La stratégie gagnante de Monty Hall ●●●

a. Trois portes : une voiture derrière l'une, une chèvre derrière chacune des deux autres. Le candidat choisit une porte au hasard. Le présentateur, qui sait où est la voiture, ouvre **une autre** porte, qui cache une chèvre, puis propose au candidat de changer. Quelle est la probabilité que la première porte cache la voiture ?

b. Le candidat **garde** sa porte. Quelle est sa probabilité de gagner la voiture ?

c. Il **change** de porte. Construire un arbre (premier niveau : ce que cache la première porte) et calculer sa probabilité de gagner. Quelle stratégie choisir ?

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Arbres pondérés — Probabilités conditionnelles et indépendance ».