1re

COURS

Modèle linéaire — Suites arithmétiques et fonctions affines

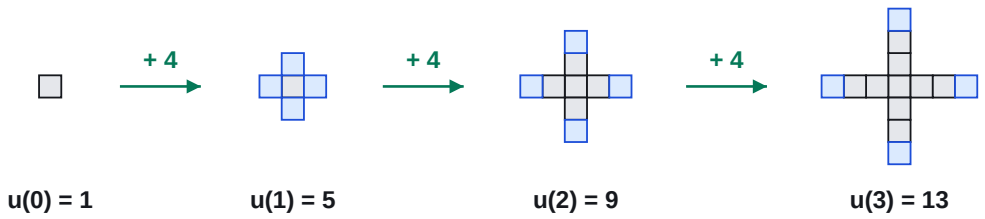
Programme de mathématiques intégré à l'enseignement scientifique de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602916A

Un capital placé à intérêts simples, un motif qui gagne quatre carreaux à chaque étape, une température convertie d'une échelle à l'autre : à chaque pas, la grandeur varie **de la même quantité**. C'est la croissance linéaire, et tout le chapitre tient dans une phrase : **on ajoute toujours le même nombre r ; la suite est alors arithmétique, $u(n) = u(0) + n \times r$, et ses points sont alignés.** La fonction affine en est la version continue.

1 Une suite : une grandeur qui évolue pas à pas

DÉFINITION

Une **suite** associe à chaque entier naturel n un nombre $u(n)$, le **terme de rang** n ; on écrit aussi u_n, et (u_n) désigne la suite entière. Elle modélise une grandeur qui évolue **par étapes** (chaque année, chaque motif) : un phénomène **discret**. Une grandeur qui varie à chaque instant est un phénomène **continu**, modélisé par une **fonction**. La suite est définie **de façon explicite** si $u(n)$ est donné par une formule en n : on calcule directement n'importe quel terme. Elle est définie **par récurrence** si l'on donne le **premier terme** et la règle qui donne $u(n+1)$ à partir de $u(n)$: pour atteindre $u(10)$, il faut calculer tous les termes précédents.



Le motif de rang n compte $u(n)$ carreaux. D'un rang au suivant, on ajoute un carreau au bout de chacune des quatre branches (en bleu).

EXEMPLE

Pour ces motifs en croix, exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$, puis $u(n)$ en fonction de n. Combien de carreaux compte le motif de rang 25 ?

1. **Récurrence** : on ajoute 4 carreaux à chaque rang, donc $u(0) = 1$ et $u(n+1) = u(n) + 4$.
   $u(1) = 1 + 4 = 5$
2. **Formule explicite** : le carreau central, plus n carreaux sur chacune des 4 branches, donc $u(n) = 1 + 4n$. Contrôle :
   $u(3) = 1 + 4 \times 3 = 13$
3. Sans calculer les 24 motifs intermédiaires :
   $u(25) = 1 + 4 \times 25 = 101$

Le motif de rang 25 compte 101 carreaux.

PIÈGE

Confondre $u(n+1)$ et $u(n)+1$. — $u(n+1)$ est le **terme suivant**, de rang $n+1$; $u(n)+1$ est le terme de rang n augmenté de 1. Ici, $u(3) = 13$, le terme suivant est $u(4) = 17$, mais $u(3) + 1 = 14$.

Ce que ça coûte : la relation de récurrence est fausse, et chaque terme calculé avec elle.

Le réflexe : entre les parenthèses, le **rang** ; en dehors, la **valeur**.

2 Les suites arithmétiques

DÉFINITION

Une suite est **arithmétique** s'il existe un nombre r, appelé **raison**, tel que, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n) + r$. On passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre** : l'écart $u(n+1) - u(n)$ est constant, égal à r. C'est le modèle d'une **croissance linéaire discrète**.

$$u(n+1) = u(n) + r$$

PROPRIÉTÉ

Terme de rang n (démontré). Si (u_n) est arithmétique de raison r, alors, pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + n \times r$. *Démonstration* : on additionne les n égalités $u(1) - u(0) = r$, $u(2) - u(1) = r$, ..., $u(n) - u(n-1) = r$; les termes intermédiaires s'éliminent deux à deux, il reste $u(n) - u(0) = n \times r$. De même, entre les rangs p et n il y a $n - p$ pas : $u(n) = u(p) + (n-p) \times r$. Si la suite commence au rang 1 : $u(n) = u(1) + (n-1) \times r$.

RECONNAÎTRE ET JUSTIFIER UNE CROISSANCE LINÉAIRE

1. **Dans un énoncé**, citer la phrase qui dit que l'on **ajoute** (ou retire) **la même quantité** à chaque étape.
2. **Pour une formule**, calculer $u(n+1) - u(n)$ avec n quelconque : s'il ne dépend pas de n, la suite est arithmétique de cette raison.
   $u(n) = 7 - 2n$ donne $u(n+1) - u(n) = 7 - 2(n+1) - (7 - 2n) = -2$. Toute suite $u(n) = a + b \times n$ est arithmétique de raison b.
3. **Pour une liste de valeurs**, calculer les écarts : un seul écart différent prouve que la suite **n'est pas** arithmétique ; des écarts égaux ne font que le **suggérer**.

EXEMPLE

Un capital de 1 500 € est placé à **intérêts simples** au taux annuel de 2 % : chaque année, il rapporte 2 % du capital **initial**, ajoutés au compte. On note $C(n)$ la somme sur le compte au bout de n années. Exprimer $C(n)$, puis calculer $C(8)$.

1. Les intérêts portent sur le capital initial : ils sont les mêmes chaque année, en euros :
   $1500 \times \frac{2}{100} = 30$
2. On ajoute 30 € par an : $C(n+1) = C(n) + 30$. Suite arithmétique de premier terme $C(0) = 1\,500$ et de raison 30, donc $C(n) = 1\,500 + 30n$, et
   $C(8) = 1500 + 30 \times 8 = 1740$

$C(n) = 1\,500 + 30n$; au bout de 8 ans, le compte affiche 1 740 €.

PIÈGE

Calculer les intérêts simples sur la somme de l'année précédente : $1\,500 \times 1{,}02$, puis $1\,530 \times 1{,}02$... — ce sont les intérêts **composés** : on **multiplie** à chaque étape, la croissance n'est plus linéaire. À intérêts simples, on **ajoute** 30 € par an.

Ce que ça coûte : le modèle, et toutes les valeurs qui en découlent.

Le réflexe : se demander : ajoute-t-on une quantité fixe, ou multiplie-t-on par un coefficient fixe ?

PIÈGE

Écrire $u(n) = u(1) + n \times r$ pour une suite qui commence au rang 1. — de $u(1)$ à $u(n)$, il n'y a que $n - 1$ pas. Avec $u(1) = 8$ et $r = 4$, la formule fausse donne 12 pour le premier terme.

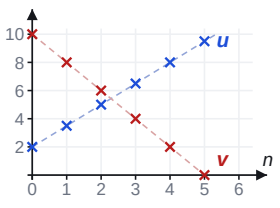
Ce que ça coûte : tous les termes, et le rang de tout seuil.

Le réflexe : tester la formule sur le premier terme : elle doit le redonner.

3 Sens de variation et représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Sens de variation (démontré). Une suite arithmétique de raison r est **croissante** si $r > 0$, **décroissante** si $r < 0$, **constante** si $r = 0$: en effet, $u(n+1) - u(n) = r$ pour tout n.
Représentation. On représente une suite par les **points isolés** $(n\,;\,u(n))$. Pour une suite arithmétique, ces points sont **alignés** sur la droite d'équation $y = rx + u(0)$; on ne les relie pas, car entre deux rangs entiers la suite n'a pas de valeur. Ci-contre, $u(n) = 2 + 1{,}5n$ monte de $1{,}5$ à chaque pas, $v(n) = 10 - 2n$ descend de 2.



Les pointillés montrent l'alignement ; ils ne font pas partie du tracé.

REPRÉSENTER LES TERMES D'UNE SUITE

1. Dresser un **tableau de valeurs** n, $u(n)$, puis choisir les **unités** des axes ; un axe peut ne pas partir de 0, à condition de le signaler.
2. Placer les points $(n\,;\,u(n))$ par des croix, **sans les relier**. Alignés, avec des écarts verticaux égaux : la croissance est linéaire.

PIÈGE

Relier les points par un trait continu, puis lire $u(2{,}5)$. — une suite n'existe qu'aux rangs **entiers** : il n'y a ni motif de rang 2,5 ni « année 2,5 » d'un placement annuel.

Ce que ça coûte : la représentation, et les lectures qu'on en tire.

Le réflexe : des croix pour une suite ; un trait continu pour une fonction.

4 Fonctions affines : la croissance linéaire continue

PROPRIÉTÉ

Rappel de seconde. Une fonction **affine** $f(x) = mx + p$ a pour représentation la **droite** d'équation réduite $y = mx + p$: m est le **coefficient directeur**, p l'**ordonnée à l'origine** ($f(0) = p$). Elle est croissante si $m > 0$, décroissante si $m < 0$, constante si $m = 0$. **Taux d'accroissement (démontré).** Pour $a \neq b$, $f(b) - f(a) = (mb + p) - (ma + p) = m(b - a)$, donc $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$: le taux est **constant**, quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente toujours de m. C'est la raison d'une suite arithmétique, en continu : $u(n) = u(0) + rn$ est la fonction affine $x \mapsto rx + u(0)$ prise aux entiers.

TRACER UNE DROITE, LIRE SON ÉQUATION

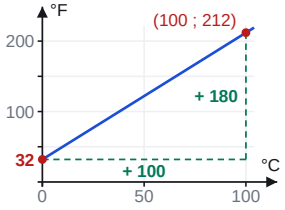
1. **Tracer** $y = mx + p$: placer $(0\,;\,p)$, puis avancer de 1 et monter de m (descendre si $m < 0$) ; relier les deux points.
2. **Coefficient directeur de** (AB) : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, déplacement **vertical** sur déplacement **horizontal**.
3. **Lire l'équation réduite** : p là où la droite coupe l'axe des ordonnées, m en divisant la montée par l'avancée.

EXEMPLE

La droite ci-contre donne la température F en degrés Fahrenheit en fonction de la température C en degrés Celsius. Elle passe par $(0\,;\,32)$ et $(100\,;\,212)$: la glace fond à 0 °C, soit 32 °F, et l'eau bout à 100 °C, soit 212 °F, sous pression atmosphérique normale. Lire son équation, puis convertir 37 °C.

1. Coefficient directeur : $m = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = 1{,}8$
2. La droite coupe l'axe des ordonnées en 32 : $p = 32$, d'où $F = 1{,}8\,C + 32$, et $1{,}8 \times 37 + 32 = 98{,}6$

$F = 1{,}8\,C + 32$; 37 °C correspondent à 98,6 °F.



Avancée de 100, montée de 180 : $m = 1{,}8$.

PIÈGE

Calculer le coefficient directeur à l'envers : $\dfrac{100 - 0}{212 - 32}$. — on obtient environ 0,56, l'inverse de 1,8. Le coefficient directeur est la variation des **ordonnées** divisée par celle des **abscisses**.

Ce que ça coûte : l'équation de la droite, et tout ce qui en découle.

Le réflexe : « ce qui monte sur ce qui avance » : les y en haut, les x en bas.

Linéaire n'est pas proportionnel. Avec $p \neq 0$, 20 °C font 68 °F, mais 40 °C ne font pas le double : ils font 104 °F. Ce sont les **variations** qui sont proportionnelles : 20 °C de plus donnent toujours 36 °F de plus.

5 Résoudre un problème de seuil

CHERCHER UN SEUIL

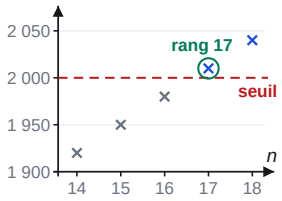
1. **Traduire la question par une inéquation** : « dépasser 2 000 € » s'écrit $C(n) > 2\,000$.
2. **Remplacer le terme par son expression** et résoudre ; diviser par un nombre **négatif** change le sens de l'inégalité.
3. **Prendre le plus petit entier qui convient**, puis **vérifier des deux côtés** : ce rang franchit le seuil, le précédent non.
   sans inéquation, on calcule les termes de proche en proche, à la calculatrice ou au tableur.

EXEMPLE

Avec $C(n) = 1\,500 + 30n$, au bout de combien d'années la somme dépassera-t-elle 2 000 € ?

1. On résout $1\,500 + 30n > 2\,000$, soit $30n > 500$. On divise par 30, positif, sans changer le sens :
   $\frac{500}{30} \approx 16{,}67$
   donc $n > 16{,}67$.
2. Le plus petit entier qui convient est 17. Vérification :
   $C(16) = 1500 + 30 \times 16 = 1980$
   et $C(17) = 1\,500 + 30 \times 17 = 2\,010$: $1\,980 < 2\,000 < 2\,010$.

La somme dépasse 2 000 € au bout de 17 années.



$C(14)$ à $C(18)$; l'axe vertical part de 1 900 €.

PIÈGE

Arrondir $n > 16{,}67$ à l'entier le plus proche : « 16 ans ». — $C(16) = 1\,980$ € : le seuil n'est pas atteint. Le rang doit **vérifier** l'inégalité.

Ce que ça coûte : la réponse au problème.

Le réflexe : calculer le terme du rang trouvé et celui du rang précédent.

PIÈGE

De $-150n < -1\,900$, conclure $n < \frac{1\,900}{150}$. — on a divisé par -150 sans changer le sens. Une suite décroissante passe sous un seuil pour les **grands** rangs.

Ce que ça coûte : le sens de la réponse, donc la réponse.

Le réflexe : devant un négatif, retourner l'inégalité, puis contrôler avec le sens de variation.

À VÉRIFIER

- Phrase de l'énoncé citée : on **ajoute** la même quantité ?
- Formule explicite testée sur le **premier terme** ?
- Sens de variation justifié par le **signe** de r ou de m ?
- Points **isolés** ; coefficient directeur y **sur** x ?
- Seuil : **plus petit entier**, rang précédent vérifié ?

À RETENIR

- Suite arithmétique de raison r : $u(n+1) = u(n) + r$, on ajoute toujours r.
- Terme de rang n : $u(n) = u(0) + n \times r$; départ au rang 1 : $u(n) = u(1) + (n-1) \times r$.
- $r > 0$: croissante ; $r < 0$: décroissante. Points $(n\,;\,u(n))$ alignés, jamais reliés.
- Fonction affine $f(x) = mx + p$: une droite, de coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, taux d'accroissement constant.
- Seuil : une inéquation, puis le **plus petit entier** qui convient, vérifié des deux côtés.