CORRIGÉ

1re

Corrigé détaillé
8 exercices

Modèle exponentiel — Suites géométriques, fonctions a^x

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Automatismes : de tête, sans calculatrice

1. a. Coefficient $1{,}15$. De tête : 10 % de 60 font 6, et 5 % font 3.
$60 \times 1{,}15 = 69$
le nouveau prix est 69 €.
2. b. Taux d'évolution :
$\frac{200-250}{250} = -0{,}2$
la population a baissé de 20 %.
3. c. Les coefficients se multiplient :
$1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$
hausse globale de 21 %, et non de 20 %.
4. d. Coefficient réciproque :
$\frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$
il faut une baisse de 20 %, et non de 25 %.
5. e. On divise par le coefficient $0{,}8$:
$48 \div 0{,}8 = 60$
le prix initial était 60 €.

2 Reconnaître une suite géométrique. Pour chaque suite, dire si elle peut être géométrique ; si oui, donner sa raison, son sens de variation et son terme de rang n.

1. a. Les quotients $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{6}$ et $\frac{13{,}5}{9}$ valent tous $1{,}5$: la suite peut être géométrique de raison $1{,}5$. Comme $1{,}5 > 1$ et $u(0) > 0$, elle est croissante, et $u(n) = 4 \times 1{,}5^n$.
2. b. $\frac{6}{3} = 2$, mais $\frac{9}{6} = 1{,}5$: les quotients diffèrent, la suite n'est pas géométrique. Ses différences valent toutes 3 : elle est arithmétique (voir la fiche *Modèle linéaire*).
3. c. Les quotients $\frac{180}{200}$, $\frac{162}{180}$ et $\frac{145{,}8}{162}$ valent tous $0{,}9$: raison $0{,}9$, soit une baisse de 10 % à chaque pas. Comme $0 < 0{,}9 < 1$ et $w(0) > 0$, elle est décroissante, et $w(n) = 200 \times 0{,}9^n$.
$\frac{145{,}8}{162} = 0{,}9$

3 Un médicament dans le sang

1. a. Perdre 10 %, c'est multiplier par $1 - 0{,}1$: $u(n+1) = 0{,}9 \times u(n)$. La suite est géométrique, de premier terme $u(0) = 500$ et de raison $0{,}9$.
$q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
2. b. $u(n) = 500 \times 0{,}9^n$, donc :
$u(4) = 500 \times 0{,}9^4 = 500 \times 0{,}6561 = 328{,}05$
il reste 328,05 mg au bout de 4 heures.
3. c. $u(0) > 0$ et $0 < 0{,}9 < 1$: la suite est strictement décroissante ; la quantité diminue chaque heure.
4. d. La table donne d'abord :
$u(6) = 500 \times 0{,}9^6 \approx 265{,}72$
5. puis :
$u(7) = 500 \times 0{,}9^7 \approx 239{,}15$
comme $u(6) > 250$, $u(7) < 250$ et que la suite décroît, il reste moins de 250 mg au bout de 7 heures.

4 Vrai ou faux ? Justifier, sans calculatrice.

1. a. **Faux.** Les coefficients se multiplient : le prix baisse de 1 %.
$1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$
2. b. **Vrai.** Suite géométrique de raison $0{,}95$, avec $0 < 0{,}95 < 1$ et $u(0) = 40 > 0$: elle est décroissante.
3. c. **Vrai.** $4^{0{,}5} = 4^{1/2} = \sqrt{4}$, et $2^2 = 4$.
$4^{0{,}5} = \sqrt{4} = 2$
4. d. **Faux.** $1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44$: la hausse est de 44 %.
$1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44$
5. e. **Vrai.** D'après la propriété admise $a^x \times a^y = a^{x+y}$, et $3 + 1{,}5 = 4{,}5$.
$3 + 1{,}5 = 4{,}5$
6. f. **Faux.** Le taux moyen est de 20 % par an, car $1{,}2^2 = 1{,}44$; avec 22 %, on obtiendrait $1{,}22^2 = 1{,}4884$.
$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

---

5 Repérer l'erreur : un placement

1. a. $0{,}03$ est le taux, pas le coefficient : multiplier par $0{,}03$ ferait tomber le capital à 60 € en un an. Le coefficient est $1 + 0{,}03 = 1{,}03$, donc $C(n) = 2\,000 \times 1{,}03^n$.
$2000 \times 0{,}03 = 60$
2. b. Ajouter 60 € par an, c'est le modèle des intérêts **simples**, une suite arithmétique. À intérêts composés :
$C(10) = 2000 \times 1{,}03^{10} \approx 2687{,}83$
3. Le capital vaut environ 2 687,83 € au bout de 10 ans, soit 87,83 € de plus que le résultat de Léa : les intérêts rapportent eux-mêmes des intérêts.
$2687{,}83 - 2600 = 87{,}83$
4. c. Six mois, c'est une demi-année : $x = 0{,}5$.
$C(0{,}5) = 2000 \times 1{,}03^{0{,}5} \approx 2029{,}78$
5. Au bout de 6 mois, le capital vaut environ 2 029,78 € : un peu moins que 2 030 €, car une demi-année ne rapporte pas exactement la moitié des intérêts annuels.

---

6 Décroissance radioactive

1. a. On divise par 2 à chaque demi-vie : $m(1) = 50$ g, $m(2) = 25$ g, $m(3) = 12{,}5$ g, et :
$m(4) = 100 \times 0{,}5^4 = 6{,}25$
2. b. $0 < 0{,}5 < 1$, donc $x \mapsto 0{,}5^x$ est strictement décroissante, et m aussi (on multiplie par $100 > 0$). La courbe part du point $(0\,;100)$, passe par les points du a. et reste au-dessus de l'axe des abscisses.
3. c. 4 jours, c'est une demi-vie sur deux : $x = 0{,}5$.
$m(0{,}5) = 100 \times 0{,}5^{0{,}5} \approx 70{,}71$
4. Il reste environ 70,7 g au bout de 4 jours. Ce n'est pas 75 g, valeur à mi-chemin entre 100 et 50 : la décroissance n'est pas linéaire, elle est plus rapide au début. Contrôle : $0{,}7071^2 \approx 0{,}5$.
5. d. De tête, $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$, donc :
$m(7) = 100 \times 0{,}5^7 = 0{,}78125$
et $m(6) = 1{,}5625$ g, encore supérieur à 1 g.
6. Il reste moins de 1 g à partir de 7 demi-vies, soit au bout de $7 \times 8 = 56$ jours.
$7 \times 8 = 56$

---

7 La rumeur en cascade

1. a. Chaque nouvel informé en informe 3 : on multiplie par 3 chaque jour. $v(1) = 3$, $v(2) = 9$ et $v(3) = 27$; la suite est géométrique de raison 3, et $v(n) = 3^n$.
$v(3) = 3^3 = 27$
2. b. De tête, $3^5 = 9 \times 9 \times 3 = 243$. Or $v(10) = 3^{10} = \left(3^5\right)^2 = 243^2$, proche de $250^2 = 62\,500$: environ 6×10^4, quelques dizaines de milliers. Valeur exacte, à la calculatrice :
$3^{10} = 243^2 = 59\,049$
3. c. La table de valeurs donne $v(12) = 3^{12} = 531\,441$, puis :
$3^{13} = 1\,594\,323$
$v(12) < 1\,000\,000 < v(13)$: c'est le jour 13.
4. d. Non. Le modèle annonce $v(10) = 59\,049$ nouveaux informés le seul jour 10, plus que les 50 000 habitants de la ville. Il cesse d'être valable avant : de plus en plus souvent, la personne à qui l'on répète la rumeur la connaît déjà.

---

8 Taux d'évolution moyens

1. a. Coefficient global : $\frac{48\,400}{40\,000} = 1{,}21$
   hausse globale de 21 %.
2. Deux années, et $1{,}1^2 = 1{,}21$: $1{,}21^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$
   taux moyen : $+10$ % par an.
3. b. Deux ans de plus à $+10$ % par an : coefficient $1{,}1^2 = 1{,}21$. $48\,400 \times 1{,}21 = 58\,564$
   on peut prévoir environ 58 564 habitants.
4. c. Coefficient global $1 - 0{,}19 = 0{,}81$, et $0{,}9^2 = 0{,}81$: $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$
   baisse moyenne de 10 % par an.
5. d. Coefficient global $1{,}3$, sur 5 évolutions : $1{,}3^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}0539$
   taux moyen d'environ $+5{,}39$ % par an.
6. Contrôle : $1{,}0539^5 \approx 1{,}30$. Le taux moyen n'est pas $30 \div 5 = 6$ %, car $1{,}06^5 \approx 1{,}34$.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Traduire un taux en coefficient et enchaîner des évolutions, de tête	2 pts	Additionner des pourcentages ; prendre $0{,}2$ pour une baisse de 20 % ; inverser un taux par son opposé
Écrire la récurrence et le terme de rang n ; justifier le sens de variation par la raison	3 pts	Exposant n au lieu de $n-1$ si la suite commence à $u(1)$; intérêts simples au lieu de composés ; sens de variation lu sur trois termes
Calculer un taux moyen ou une valeur pour un exposant non entier	2 pts	Diviser le taux global par n ; traiter une demi-période par proportionnalité
Résoudre un seuil et conclure dans le contexte	2 pts	Donner le rang le plus proche au lieu du premier qui convient ; omettre les deux termes encadrants ou l'unité
Estimer un ordre de grandeur et discuter la validité du modèle	1 pt	Traiter des doublements successifs par proportionnalité ; prolonger le modèle sans regarder le contexte