1re

COURS

Modèle exponentiel — Suites géométriques, fonctions a^x

Programme de mathématiques intégré à l'enseignement scientifique de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602916A

Un capital placé à 3 % par an, un médicament dont l'organisme élimine 20 % chaque heure, une rumeur que chacun répète à trois personnes : à chaque étape, la grandeur est **multipliée par le même nombre**. **Un taux d'évolution constant t donne une suite géométrique de raison $q = 1 + t$: $u(n) = u(0) \times q^n$.** La fonction $x \mapsto a^x$ prolonge ce modèle entre deux entiers : elle donne la valeur au bout de six mois, ou d'une fraction de demi-vie.

1 Évolutions en pourcentage : les automatismes

DÉFINITION

Une grandeur passe d'une valeur initiale $V_0 > 0$ à une valeur finale V_1. Son **taux d'évolution** est $t = \dfrac{V_1 - V_0}{V_0}$, souvent exprimé en pourcentage : $t = 0{,}15$ s'écrit $+15$ %. Alors $V_1 = (1 + t) \times V_0$: le nombre $1 + t$ est le **coefficient multiplicateur**, supérieur à 1 pour une hausse, compris entre 0 et 1 pour une baisse.

CALCULER DE TÊTE AVEC LES COEFFICIENTS

1. **Traduire** chaque taux en coefficient : $+5$ % → $\times 1{,}05$; -20 % → $\times 0{,}8$; $+100$ % → $\times 2$.
2. **Valeur finale** : multiplier par le coefficient. **Valeur initiale** : diviser par le coefficient.
3. **Évolutions successives** : les coefficients se **multiplient** (les taux ne s'additionnent pas) ; retirer 1 au produit donne le taux global.
4. **Évolution réciproque** : le coefficient réciproque est $\dfrac{1}{1+t}$, le taux réciproque $\dfrac{1}{1+t} - 1$. Une hausse de 25 % s'annule par une baisse de 20 %, et non de 25 %, car $\dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$.



1,25 × 0,8 = 1 : retour au départ

1,1 × 0,9 = 0,99 : baisse de 1 %

On raisonne sur les coefficients : à gauche, deux évolutions qui s'annulent ; à droite, deux évolutions « opposées » qui ne s'annulent pas.

EXEMPLE

Une action cotée 40 € gagne 25 %, puis 20 %. Quel est le taux d'évolution global ? Quelle baisse la ramènerait ensuite à 40 € ?

1. Les coefficients se multiplient, de tête : $1{,}25 \times 1{,}2 = 1{,}25 + 0{,}25$.
   $1{,}25 \times 1{,}2 = 1{,}5$
   taux global $+50$ %, et non $+45$ % ; l'action vaut $40 \times 1{,}5 = 60$ €.
2. Coefficient réciproque, puis taux réciproque.
   $\frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$
   $0{,}667 - 1 = -0{,}333$: une baisse d'environ 33,3 %.

Hausse de 50 % ; une baisse d'environ 33,3 %, et non de 50 %, ramènerait l'action à 40 €.

De tête, sans calculatrice (automatismes, épreuve anticipée) : traduire un taux en coefficient ; les produits simples comme $1{,}1^2 = 1{,}21$, $0{,}9^2 = 0{,}81$, $1{,}2^2 = 1{,}44$, $2^{10} = 1\,024$; les réciproques usuels ($\times 1{,}25$ et $\times 0{,}8$, $\times 2$ et $\times 0{,}5$). **À la calculatrice**, quand elle est permise : une puissance comme $1{,}03^{10}$, un exposant non entier comme $1{,}04^{0{,}5}$.

PIÈGE

Une hausse de 20 % puis une hausse de 30 % : « $+50$ % ». — la seconde hausse porte sur un prix déjà augmenté : $1{,}2 \times 1{,}3 = 1{,}56$, soit $+56$ %.

Ce que ça coûte : le taux global, et toute valeur calculée à partir de lui.

Le réflexe : passer par les coefficients ; ne jamais additionner des pourcentages successifs.

2 Suites géométriques : le même coefficient à chaque pas

DÉFINITION

Soit $q > 0$. Une suite u de premier terme $u(0) > 0$ est **géométrique de raison** q si, pour tout entier n, $u(n+1) = q \times u(n)$: c'est la **définition par récurrence**. Tous ses termes sont strictement positifs ; on écrit aussi u_n pour $u(n)$. Une grandeur **discrète** (relevée d'année en année, d'heure en heure) à **taux d'évolution constant** t se modélise par une suite géométrique de raison $q = 1 + t$.

PROPRIÉTÉ

Terme de rang n. Pour aller de $u(0)$ à $u(n)$, on multiplie n fois par q : $u(n) = u(0) \times q^n$. Cette **relation fonctionnelle** donne n'importe quel terme sans calculer les précédents. Si la suite commence à $u(1)$, il n'y a que $n-1$ pas : $u(n) = u(1) \times q^{n-1}$.

RECONNAÎTRE ET MODÉLISER

1. **Repérer** un pourcentage constant (« $+3$ % par an », « perd 20 % par heure ») ou un même facteur (« double chaque jour »). Ajouter toujours la **même quantité** relève d'une suite arithmétique : voir la fiche *Modèle linéaire*.
2. **Sur des valeurs**, calculer les quotients $\frac{u(1)}{u(0)}$, $\frac{u(2)}{u(1)}$, $\frac{u(3)}{u(2)}$: s'ils sont égaux, leur valeur commune est q.
3. **Écrire** $q = 1 + t$, le premier terme avec son rang, puis $u(n+1) = q \times u(n)$ et $u(n) = u(0) \times q^n$; tester pour $n = 0$ et $n = 1$.

EXEMPLE

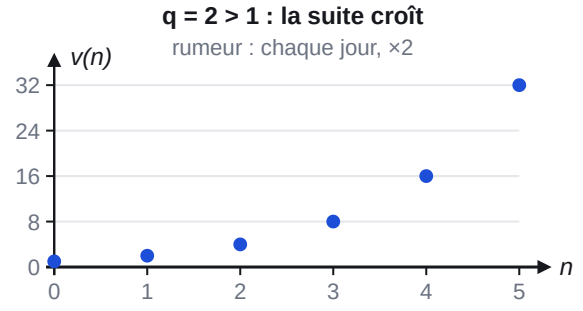
On injecte 80 mg d'une substance dans le sang ; chaque heure, l'organisme en élimine 20 %. On note $u(n)$ la quantité, en mg, au bout de n heures. Exprimer $u(n)$ en fonction de n et calculer $u(3)$ de tête.

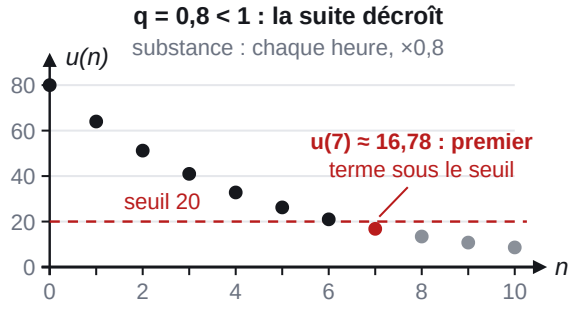
1. Perdre 20 %, c'est garder 80 %. La suite est géométrique de premier terme $u(0) = 80$ et de raison : $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
   donc $u(n+1) = 0{,}8 \times u(n)$ et $u(n) = 80 \times 0{,}8^n$.
2. De tête : $0{,}8^2 = 0{,}64$, puis $0{,}64 \times 0{,}8 = 0{,}512$.
   $u(3) = 80 \times 0{,}8^3 = 80 \times 0{,}512 = 40{,}96$

$u(n) = 80 \times 0{,}8^n$ **; au bout de 3 heures, il reste 40,96 mg, à peu près la moitié de la dose.**

PROPRIÉTÉ

Sens de variation. Pour tout n, $u(n+1) - u(n) = q \times u(n) - u(n) = u(n) \times (q-1)$. Comme $u(n) > 0$, cette différence a le signe de $q - 1$. Donc : si $q > 1$, la suite est **strictement croissante** ; si $0 < q < 1$, elle est **strictement décroissante** ; si $q = 1$, elle est constante. La raison suffit, sans calculer aucun terme.





*Une suite se représente par des **points isolés**, un par entier n, que l'on ne relie pas. À gauche, la rumeur ($q = 2$) ; à droite, la substance de l'exemple ($q = 0{,}8$) et le seuil de 20 mg traité en partie 4.*

PIÈGE

« La substance perd 20 % par heure », donc $q = 0{,}2$. — multiplier par $0{,}2$, c'est garder 20 % : on trouverait $u(1) = 16$ mg au lieu de 64 mg.

Ce que ça coûte : tous les termes, et le seuil calculé ensuite.

Le réflexe : $q = 1 + t$ avec $t = -0{,}2$, donc $q = 0{,}8$; contrôler $u(1)$ avec l'énoncé.

PIÈGE

Pour 2 000 € placés à 3 % d'intérêts composés : « $C(n) = 2\,000 + 60n$ ». — c'est le modèle des intérêts **simples**. À intérêts **composés**, $C(n) = 2\,000 \times 1{,}03^n$.

Ce que ça coûte : le modèle entier, donc toutes les valeurs.

Le réflexe : un pourcentage de la valeur **actuelle** : on multiplie ; un même montant : on ajoute.

PIÈGE

Écrire $u(n) = u(1) \times q^n$ pour une suite qui commence à $u(1)$. — de $u(1)$ à $u(n)$, il n'y a que $n - 1$ pas : chaque terme est faux d'un facteur q.

Ce que ça coûte : tous les termes, sans résultat visiblement absurde.

Le réflexe : tester la formule au premier rang : pour $n = 1$, elle doit redonner $u(1)$.

3 Les fonctions exponentielles : la puissance entre deux entiers

DÉFINITION

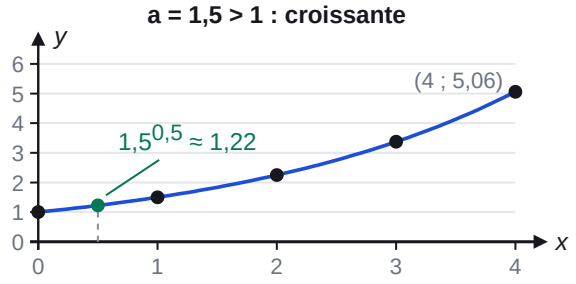
Soit $a > 0$. La suite $n \mapsto a^n$ se prolonge à tous les réels positifs : la **fonction exponentielle de base** a est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = a^x$. Pour x non entier, a^x s'obtient à la **calculatrice** (touche ^) ; toujours $a^0 = 1$, $a^1 = a$ et $a^x > 0$. Elle modélise une grandeur **continue** à taux d'évolution constant par unité de temps : 1 000 € placés à intérêts composés à 4 % par an valent, au bout de 6 mois, $1\,000 \times 1{,}04^{0{,}5} \approx 1\,019{,}80$ €.

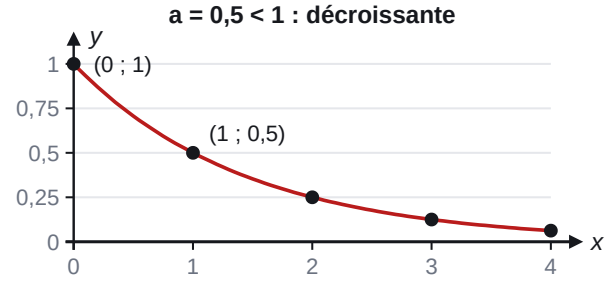
PROPRIÉTÉ

Propriétés algébriques, admises : ce sont celles des puissances entières, étendues. Pour $a > 0$, $b > 0$ et $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$: $a^x \times a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $a^x \times b^x = (ab)^x$; et, si $x \geqslant y$, $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. **Cas de l'exposant $1/n$** (n entier, $n \geqslant 1$) : $\left(a^{1/n}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a^1 = a$, donc $a^{1/n}$ est **le nombre positif dont la puissance n-ième vaut a** ; en particulier $a^{1/2} = \sqrt{a}$. De tête : $4^{1/2} = 2$, $1{,}21^{1/2} = 1{,}1$, $8^{1/3} = 2$.

PROPRIÉTÉ

Variations, admises, comme pour les suites : si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$; si $0 < a < 1$, elle est **strictement décroissante** ; si $a = 1$, elle est constante, égale à 1. Sa courbe passe par $(0\,;1)$ et $(1\,;a)$, et **relie** les points de la suite $n \mapsto a^n$.





La courbe « complète » le nuage de la suite (points noirs). Le point vert donne la valeur au bout d'une demi-période : $1{,}5^{0{,}5} \approx 1{,}22$.

CALCULER UN TAUX D'ÉVOLUTION MOYEN

1. **Coefficient global** C des n évolutions : le produit des coefficients, ou le quotient de la valeur finale par la valeur initiale.
2. Le **taux moyen** t_m est le taux qui, appliqué n fois, produit le même effet : $(1 + t_m)^n = C$, donc $t_m = C^{1/n} - 1$. Contrôle : $(1 + t_m)^n$ redonne C.

EXEMPLE

Un logement passe de 200 000 € à 242 000 € en 2 ans. Quel est le taux moyen annuel ? Et pour une valeur qui double en 10 ans ?

1. Coefficient global, de tête : $\dfrac{242\,000}{200\,000} = 1{,}21$. Deux évolutions : exposant $\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire racine carrée ; de tête, puisque $1{,}1^2 = 1{,}21$:
   $1{,}21^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$
2. Doubler en 10 ans : coefficient global 2, sur 10 évolutions, à la calculatrice.
   $2^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}0718$

$+10$ % par an en moyenne, et non $+10{,}5$ % ; doubler en 10 ans, c'est environ $+7{,}18$ % par an.

PIÈGE

Taux moyen d'une hausse de 21 % en deux ans : « $21 \div 2 = 10{,}5$ % par an ». — les évolutions se multiplient : $1{,}105^2 \approx 1{,}221$, soit $+22{,}1$ %, trop.

Ce que ça coûte : le taux, et toute prévision qui l'utilise.

Le réflexe : $t_m = C^{1/n} - 1$, puis contrôler que $(1 + t_m)^n = C$.

PIÈGE

Calculer $1{,}21^{1/2}$ comme $1{,}21 \div 2 = 0{,}605$. — l'exposant $1/2$ n'est pas une division par 2 : $0{,}605^2 \approx 0{,}37$, pas $1{,}21$; et un coefficient inférieur à 1 annoncerait une baisse.

Ce que ça coûte : le résultat, et son sens : une hausse devient une baisse.

Le réflexe : $a^{1/2} = \sqrt{a}$; vérifier en élevant au carré.

PIÈGE

« La valeur double en 10 ans, donc elle augmente de 50 % en 5 ans. » — en 5 ans, le coefficient est $2^{1/2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$: environ $+41$ %. D'ailleurs $1{,}5^2 = 2{,}25$, pas 2.

Ce que ça coûte : la valeur intermédiaire et son interprétation.

Le réflexe : une fraction de la durée se traite par un exposant fractionnaire, jamais par proportionnalité.

4 Seuils et ordres de grandeur

RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE SEUIL

1. **Écrire l'inégalité** : $u(n) > S$ (croissance) ou $u(n) < S$ (décroissance). **Calcul** : termes de proche en proche, à la calculatrice (mode table) ou au tableur (cellule = précédente $\times q$, recopiée vers le bas). **Graphique** : premier point qui franchit la droite $y = S$. **Programme** : tant que le seuil n'est pas franchi, remplacer u par $q \times u$ et n par $n + 1$.
2. **Conclure** par le **premier** rang qui convient, en citant les deux termes qui l'encadrent : ce rang vérifie l'inégalité, le précédent non.

EXEMPLE

On reprend $u(n) = 80 \times 0{,}8^n$, quantité de substance en mg au bout de n heures. Au bout de combien d'heures reste-t-il moins de 20 mg ?

1. On cherche le premier n tel que $80 \times 0{,}8^n < 20$. Table de la calculatrice :
   $u(6) = 80 \times 0{,}8^6 \approx 20{,}97$
2. puis, au rang suivant :
   $u(7) = 80 \times 0{,}8^7 \approx 16{,}78$
   $u(6) > 20$ et $u(7) < 20$; la suite décroît, donc les termes suivants restent sous 20 (voir la figure de la partie 2).

Il reste moins de 20 mg au bout de 7 heures.

RÈGLE

Ordres de grandeur, de tête. $2^{10} = 1\,024 \approx 10^3$: doubler 10 fois, c'est multiplier par environ mille ; 20 fois, par environ un million ; 30 fois, par environ un milliard. Trois doublements multiplient par 8, pas par 3. Après 10 demi-vies, il reste environ un millième de la quantité initiale : $0{,}5^{10} \approx 0{,}001$. La rumeur de la figure (×2 par jour) dépasse 1 000 nouveaux informés le jour 10 ($2^9 = 512$, $2^{10} = 1\,024$), et un milliard le jour 30. Une croissance exponentielle finit par dépasser toute croissance linéaire : elle n'est réaliste que sur une **durée limitée**.

PIÈGE

Répondre « 6 heures » parce que $u(6) \approx 20{,}97$ est le terme le plus proche de 20. — on cherche $u(n) < 20$, et $u(6)$ ne le vérifie pas : la question porte sur le **premier rang qui convient**, pas sur le terme le plus proche.

Ce que ça coûte : la réponse finale, souvent la dernière question du problème.

Le réflexe : écrire les deux termes qui encadrent le seuil et vérifier l'inégalité pour chacun.

À VÉRIFIER

- J'enchaîne de tête évolutions successives et réciproques, par les coefficients.
- J'écris récurrence et terme de rang n, et je justifie le sens de variation par q.
- Je calcule a^x, $a^{1/n}$ et un taux moyen $C^{1/n} - 1$.
- Je résous un seuil (calcul, graphique, outil numérique) et je discute le modèle.

À RETENIR

- Taux t : coefficient $1 + t$; évolutions successives : on **multiplie** les coefficients ; réciproque : $\dfrac{1}{1+t}$.
- $u(n+1) = q \times u(n)$ et $u(n) = u(0) \times q^n$; départ à $u(1)$: exposant $n - 1$.
- $q > 1$: croissante ; $0 < q < 1$: décroissante. Même règle pour $x \mapsto a^x$.
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{1/2} = \sqrt{a}$.
- Taux moyen : $C^{1/n} - 1$, jamais le taux global divisé par n.
- Seuil : le **premier** rang qui convient ; $2^{10} \approx 1\,000$.