1re

Programme de spécialité mathématiques de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602917A
Relue le 14 novembre 2026

COURS

Applications de la dérivation — extremums et optimisation

Quelles dimensions donner à une boîte pour utiliser le moins de carton possible ? À quel prix vendre un produit pour maximiser le bénéfice ? Ces questions se ramènent toutes à chercher le **maximum** ou le **minimum** d'une fonction, et la dérivée est l'outil qui permet de les trouver.

1 Extremums d'une fonction

DÉFINITION

On dit que f admet un **maximum local** en a si, sur un intervalle ouvert contenant a, $f(x) \leq f(a)$; un **minimum local** si $f(x) \geq f(a)$. Un extremum est un maximum ou un minimum.

RÈGLE

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et admet un extremum local en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$. Réciproquement, si f' **s'annule en changeant de signe** en a, alors $f(a)$ est un extremum local : maximum si f' passe de $+$ à $-$, minimum si f' passe de $-$ à $+$.

La condition $f'(a) = 0$ ne suffit pas : pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe, et 0 n'est pas un extremum.

2 Position d'une courbe et de sa tangente, inégalités

RÈGLE

Pour comparer deux fonctions f et g, on étudie le signe de $h = f - g$. Si l'on montre, grâce à h', que le minimum de h est positif, alors $f(x) \geq g(x)$ pour tout x : c'est ainsi qu'on démontre une **inégalité**. La même méthode situe une courbe par rapport à une tangente.

EXEMPLE

Montrer que pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

1. On pose $h(x) = e^x - x - 1$; $h'(x) = e^x - 1$.
2. $h'(x) < 0$ si $x < 0$ et $h'(x) > 0$ si $x > 0$: h décroît puis croît.
3. Le minimum de h est $h(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

Donc $h(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x : la courbe de l'exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0.

3 Résoudre un problème d'optimisation

RÉSOUDRE UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

1. Choisir la variable x et préciser l'intervalle où elle varie.
2. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de x.
3. Dériver, étudier le signe de la dérivée, dresser le tableau de variations.
4. Lire l'extremum et répondre à la question par une phrase, avec les unités.

EXEMPLE

Avec 40 m de clôture, on délimite un enclos rectangulaire. Quelles dimensions donnent la plus grande aire ?

1. Côtés x et $20 - x$ avec $x \in [0\,;20]$.
2. Aire : $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$, donc $A'(x) = 20 - 2x$.
3. A' est positive avant 10, négative après : A est maximale en $x = 10$.
4. $A(10) = 100$.

L'aire est maximale pour un carré de 10 m de côté : 100 m².

À RETENIR

- Extremum local en a : $f'(a) = 0$; il est assuré si f' **change de signe** en a.
- Comparer f et g : étudier le signe de $f - g$ grâce à sa dérivée ; même méthode pour une courbe et sa tangente.
- Optimisation : variable et intervalle, fonction à optimiser, dérivée, tableau de variations, phrase de conclusion.