

CORRIGÉ

1^{re}

Dérivation — nombre dérivé, tangente et sens de variation

Corrigé détaillé

7 exercices

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Taux de variation et nombre dérivé.

- ① a. Pour $h = 1$: $f(4) - f(3) = 16 - 9$, divisé par 1.
 $16 - 9 = 7$
- ② Pour $h = 0,1$: $f(3,1) = 9,61$, d'où l'écart.
 $9,61 - 9 = 0,61$
- ③ On divise par h .
 $0,61 \div 0,1 = 6,1$
- ④ b. Les taux passent de 7 à 6,1 : ils se rapprochent de 6.
 $7 - 6,1 = 0,9$
- ⑤ c. $f'(x) = 2x$, donc $f'(3) = 6$.
 $2 \times 3 = 6$
le taux de variation tend bien vers le nombre dérivé quand h tend vers 0.

2 Dériver les fonctions suivantes.

- ① a. On dérive terme à terme.
 $3 \times 2 = 6$
 $f'(x) = 6x - 5$.
- ② b. x^3 donne $3x^2$, et $\frac{1}{x}$ donne $-\frac{1}{x^2}$.
 $3 - 1 = 2$
 $g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$.
- ③ c. La constante 5 se conserve.
 $5 \div 2 = 2,5$
 $h'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}$, sur $]0; +\infty[$.

3 Déterminer l'équation de la tangente.

- ① a. $f'(x) = 2x - 3$, donc la pente vaut $f'(1)$.
 $2 - 3 = -1$
- ② L'ordonnée du point de contact est $f(1)$.
 $1 - 3 = -2$
 $y = -1(x - 1) - 2$, soit $y = -x - 1$.
- ③ b. $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc la pente vaut $-\frac{1}{4}$.
 $-1 \div 4 = -0,25$
- ④ Et $g(2) = 0,5$.
 $1 \div 2 = 0,5$
 $y = -0,25(x - 2) + 0,5$, soit $y = -0,25x + 1$.

4 Dériver un produit, puis vérifier en développant.

- ① a. $u = 2x + 1, v = x - 3, u' = 2, v' = 1$. Le premier terme donne $2(x - 3)$.
 $2 \times -3 = -6$
- ② Le second donne $(2x + 1) \times 1$. En additionnant : $2x - 6 + 2x + 1$.
 $-6 + 1 = -5$
 $f'(x) = 4x - 5$.
- ③ b. En développant, $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.
 $2 \times 2 = 4$
la dérivée vaut $4x - 5$: les deux méthodes concordent.

5 Dériver un quotient.

- ① a. $u = x + 2, v = x - 1, u' = 1, v' = 1$. Le numérateur vaut $(x - 1) - (x + 2)$.
 $-1 - 2 = -3$
- ② Donc $f'(x) = \frac{-3}{(x - 1)^2}$.
 $0 - 3 = -3$
- ③ b. Un carré est strictement positif sur cet intervalle, et le numérateur est négatif.
 $-3 \div 1 = -3$
 $f' < 0$: f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$.

6 Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

- ① a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, qui se factorise en $3(x - 1)(x + 1)$.
 $3 \times 1 = 3$
- ② b. f' s'annule en -1 et 1 ; c'est un trinôme de coefficient dominant positif.
 $3 \times -1 = -3$
- ③ Il est donc positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.
 $1 - -1 = 2$
 f croît sur $] -\infty ; -1]$, décroît sur $[-1 ; 1]$, croît sur $[1 ; +\infty[$.
- ④ c. On calcule les valeurs avec f , non avec f' .
 $-1 + 3 = 2$
 $f(-1) = 2$: maximum local.
- ⑤ Puis en 1.
 $1 - 3 = -2$
 $f(1) = -2$: minimum local. Le signe de f' change bien en chacun de ces points.

7 Une boîte sans couvercle est fabriquée dans un carré de carton de 12 cm de côté, en découpant un carré de côté x à chaque coin.

- ① a. Après découpe et pliage, la base mesure $12 - 2x$ de côté et la hauteur vaut x .
 $12 - 2 \times 2 = 8$
- ② Le côté restant devant être positif, x varie dans $]0 ; 6[$.
 $12 \div 2 = 6$
- ③ b. V' s'annule en 2 et en 6, et 6 est exclu de l'intervalle.
 $18 \div 3 = 6$
- ④ Sur $]0 ; 2[$ les deux facteurs sont négatifs, donc le produit est positif ; sur $]2 ; 6[$ un seul l'est.
 $-1 \times -1 = 1$
 V croît puis décroît : maximum en $x = 2$.
- ⑤ c. On calcule le volume en 2.
 $2 \times 64 = 128$
une découpe de 2 cm donne une boîte de 128 cm^3 , le maximum possible.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
-------------------	--------	-----------------------------

Dérivées usuelles exactes	4 pts	$\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{x}$ dérivée de mémoire approximative
Règle du produit ou du quotient appliquée	4 pts	$(fg)'$ écrit $f'g'$
Ordre du numérateur d'un quotient	2 pts	$fg' - f'g$: tout le signe est inversé
Équation de tangente complète	3 pts	La bonne pente, la mauvaise ordonnée
Signe de f' après factorisation	4 pts	Un signe cherché sur une somme non factorisée
Tableau de variations et extrémums	3 pts	Les valeurs de f' portées à la place de celles de f