

COURS

Dérivation — nombre dérivé, tangente et sens de variation

1^{re}

Programme de première générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Jusqu'ici, une fonction se décrivait par ses valeurs. La dérivation la décrit par sa **vitesse de variation** : à quelle allure elle monte ou descend en chaque point. C'est le même geste que lire un compteur de vitesse plutôt qu'un compteur kilométrique — et c'est ce qui permet enfin de démontrer un sens de variation ou un maximum, au lieu de le lire sur un graphique.

1 Du taux de variation au nombre dérivé

DÉFINITION

Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ est le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Géométriquement, c'est le **coefficient directeur de la sécante** qui joint les deux points de la courbe : de combien la fonction monte, rapporté au chemin horizontal parcouru. C'est une pente moyenne sur un intervalle, pas une pente en un point.

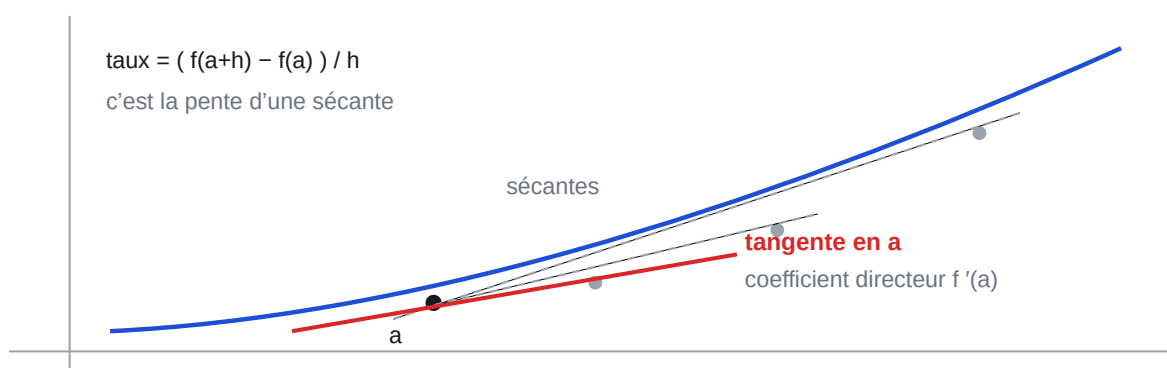
$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DÉFINITION

Lorsque h tend vers 0, la sécante bascule vers la **tangente**, et le taux de variation tend vers un nombre appelé **nombre dérivé de f en a** , noté $f'(a)$. C'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a : une vitesse **instantanée** et non plus moyenne. Une fonction admettant un tel nombre en a est dite **dérivable en a** .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

quand h diminue, la sécante bascule vers la tangente



La tangente est la position limite des sécantes quand h tend vers 0.

RÈGLE

La **tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Deux ingrédients seulement, et il faut les deux : $f'(a)$ donne la pente, $f(a)$ ancre la droite au bon point. Une tangente calculée avec la bonne pente mais la mauvaise ordonnée est une droite parallèle à la tangente — ce qui ne vaut aucun point.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

EXEMPLE

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ au point d'abscisse 2.

① On dérive : $f'(x) = 2x$, puis on évalue en 2.

$$2 \times 2 = 4$$

② On calcule l'ordonnée du point de contact.

$$2^2 = 4$$

③ On reporte dans la formule : $y = 4(x - 2) + 4$.

$$-4 \times 2 + 4 = -4$$

en développant, la constante vaut -4 .

$$\underline{y = 4x - 4}$$

2 Calculer une dérivée

les dérivées usuelles — à connaître sans hésitation

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n x^{n-1}$
$1/x$	$-1/x^2$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

$\sqrt{x}$: dérivable sur $]0; +\infty[$
seulement — pas en 0

Les dérivées usuelles, à connaître sans hésitation.

RÈGLE

Les opérations se dérivent selon quatre règles. La somme se dérive terme à terme : $(f + g)' = f' + g'$. Une constante multiplicative se conserve : $(kf)' = kf'$. Le **produit** ne se dérive pas terme à terme : $(fg)' = f'g + fg'$. Le **quotient** non plus : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, et l'ordre du numérateur compte — l'inverser change le signe du résultat.

$$(fg)' = f'g + fg' \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Dériver $f(x) = x^2 \times (3x + 1)$ en écrivant $f'(x) = 2x \times 3 = 6x$. — la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées. Un contrôle immédiat le montre : en développant d'abord, $f(x) = 3x^3 + x^2$, donc $f'(x) = 9x^2 + 2x$, qui n'est pas $6x$.

Le réflexe : nommer u et v **avant** de dériver, écrire u' et v' sur une ligne à part, puis appliquer $u'v + uv'$ sans réfléchir. Quand c'est possible, développer d'abord : c'est plus court et moins risqué.

EXEMPLE

Dériver $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ sur $]3; +\infty[$.

① On pose $u = 2x + 1$ et $v = x - 3$, d'où $u' = 2$ et $v' = 1$.

$$2 \times 1 = 2$$

② On applique $\frac{u'v - uv'}{v^2}$: le numérateur vaut $2(x - 3) - (2x + 1)$.

$$-6 - 1 = -7$$

les termes en x se simplifient : $2x - 2x = 0$, il ne reste que les constantes.

③ On conclut.

$$0 - 7 = -7$$

$$\underline{f'(x) = \frac{-7}{(x-3)^2}, \text{ strictement négative : } f \text{ est décroissante sur cet intervalle.}}$$

3 Dérivée et sens de variation

RÈGLE

C'est le théorème qui donne tout son intérêt au chapitre. Sur un intervalle, si $f' > 0$ alors f est **strictement croissante** ; si $f' < 0$, **strictement décroissante** ; si $f' = 0$ partout, constante. Étudier les variations d'une fonction revient donc à **étudier le signe de sa dérivée** — un problème de signe, souvent un trinôme, dont on sait déjà tout faire.

ÉTUDIER LES VARIATIONS D'UNE FONCTION

- ① **Donner l'ensemble de définition**, et l'intervalle d'étude s'il est imposé.
- ② **Calculer $f'(x)$** , puis la factoriser ou la réduire au même dénominateur : on ne peut étudier le signe que d'un produit ou d'un quotient, jamais d'une somme.
- ③ **Résoudre $f'(x) = 0$** et déterminer le signe de f' — discriminant, tableau de signe, ou signe évident si le dénominateur est un carré.
- ④ **Dresser le tableau de variations** : ligne des x , ligne du signe de f' , ligne des flèches, et les valeurs de f aux bornes et aux points où f' s'annule.
les valeurs remarquables se calculent avec f , jamais avec f' — c'est une confusion fréquente en fin de tableau.

Un **extrémum local** ne peut se produire qu'en un point où f' s'annule — mais l'inverse est faux, et c'est la nuance qui distingue une copie sûre. La fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0 et reste pourtant strictement croissante : sa dérivée $3x^2$ est positive de part et d'autre. Ce qui fait un extrémum n'est pas l'annulation de f' , c'est son **changement de signe**.

À VÉRIFIER

- Ai-je utilisé $f'(a)$ pour la **pente** et $f(a)$ pour l'**ordonnée** de la tangente ?
- Pour un produit ou un quotient, ai-je posé u, v, u', v' **avant** de dériver ?
- Dans le quotient, ai-je écrit $u'v - uv'$ **dans cet ordre** ?
- Ai-je **factorisé** f' avant d'en chercher le signe ?
- Mon tableau de variations donne-t-il les valeurs de f , et non de f' ?
- Ai-je vérifié le **changement de signe** avant de conclure à un extrémum ?

À RETENIR

- $f'(a)$ est la **pente de la tangente** en a : une vitesse instantanée.
- Tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ — la pente **et** l'ordonnée.
- $(x^n)' = nx^{n-1} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
- $(fg)' = f'g + fg'$ — jamais $f'g'$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ — l'ordre du numérateur compte.
- $f' > 0 \Rightarrow$ croissante · $f' < 0 \Rightarrow$ décroissante.
- Extrémum : f' doit **changer de signe**, pas seulement s'annuler.