CORRIGÉ

Fonction exponentielle — Définition, propriétés et variations

1re

Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Écrire sous la forme d'une seule exponentielle, ou développer.

1. a. Produit : on ajoute les exposants, $\mathrm{e}^{3} \times \mathrm{e}^{-5} = \mathrm{e}^{-2}$.
   $3 + (-5) = -2$
2. b. $\left(\mathrm{e}^{2}\right)^{3} = \mathrm{e}^{6}$, puis on soustrait l'exposant du dénominateur : $\mathrm{e}^{6-4} = \mathrm{e}^{2}$.
   $2 \times 3 - 4 = 2$
3. c. $(x+1) + (1-x) = 2$, donc $\mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e}^{2}$, quel que soit x.
4. d. Identité $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, avec $AB = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{0} = 1$:
5. $\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}$. Contrôle en $x = 0$: $2^2 = 4$ et $1 + 2 + 1 = 4$.
   $2^2 = 1 + 2 + 1 = 4$

2 Vrai ou faux ? Justifier.

1. a. **Vrai.** $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x+x} = \mathrm{e}^{2x}$.
2. b. **Faux.** Avec $a = b = 0$: $\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{0} = 2$, alors que $\mathrm{e}^{0+0} = 1$.
   $1 + 1 = 2$
3. c. **Faux.** Une exponentielle est strictement positive : $\mathrm{e}^{-2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}} \approx 0{,}14$.
4. d. **Vrai.** Sa dérivée $-3\,\mathrm{e}^{-3t}$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$, car $\mathrm{e}^{-3t} > 0$.
5. e. **Vrai.** La fonction exponentielle est strictement croissante : $\mathrm{e}^{a} < \mathrm{e}^{b}$ équivaut à $a < b$.
6. f. **Faux.** Elle est géométrique de raison $\mathrm{e}^{0{,}2} \approx 1{,}2214$. Ses écarts ne sont pas constants : $u_1 - u_0 \approx 0{,}2214$, mais $u_2 - u_1 \approx 1{,}4918 - 1{,}2214$.
   $1{,}4918 - 1{,}2214 = 0{,}2704$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. a. L'équation équivaut à $2x - 1 = x + 3$, donc $x = 4$.
   $2 \times 4 - 1 = 4 + 3 = 7$
2. b. Le second membre vaut e^{4x-3} : l'équation équivaut à $x^2 = 4x - 3$, soit $x^2 - 4x + 3 = 0$, ou $(x-1)(x-3) = 0$.
3. Produit nul : $x = 1$ ou $x = 3$. Contrôle pour $x = 3$:
   $3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$
4. c. La fonction exponentielle est croissante : l'inéquation équivaut à $3x \leq 8 - x$, soit $4x \leq 8$.
   $8 \div 4 = 2$
5. Donc $x \leq 2$: $\mathcal{S} =]-\infty\,;2]$.
6. d. $\mathrm{e}^{x} > 0$ pour tout x, donc le produit a le signe de $2x - 6$, qui s'annule en 3 et est positif après.
7. Conclusion : a. $\mathcal{S} = \{4\}$; b. $\mathcal{S} = \{1\,;3\}$; c. $]-\infty\,;2]$; d. $\mathcal{S} =]3\,;+\infty[$.

4 **On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$.**

1. a. Produit uv avec $u(x) = x-1$, $v(x) = \mathrm{e}^x$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$: $f'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$.
2. b. $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de x : négatif sur $]-\infty\,;0[$, nul en 0, positif sur $]0\,;+\infty[$. f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, croissante sur $[0\,;+\infty[$.
3. Le minimum est atteint en 0 : $f(0) = (0-1)\,\mathrm{e}^0 = -1$.
   $(0-1)\times 1 = -1$
4. c. -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, donc $f(x) \geq -1$ pour tout réel x.
5. d. $f(1) = 0$ et $f'(1) = \mathrm{e}$: la tangente a pour équation $y = \mathrm{e}(x-1) + 0$.
6. Conclusion : f admet -1 pour minimum, en 0, et la tangente en 1 a pour équation $y = \mathrm{e}\,x - \mathrm{e}$.

---

5 **Pour $k = 0{,}5$, on considère $f(t) = \mathrm{e}^{0{,}5t}$ et $g(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$.**

1. a. f : 0,37 ; 0,61 ; 1 ; 1,65 ; 2,72 ; 7,39. g : 2,72 ; 1,65 ; 1 ; 0,61 ; 0,37 ; 0,14.
2. b. $f'(t) = 0{,}5\,\mathrm{e}^{0{,}5t} > 0$: f est strictement croissante. $g'(t) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} < 0$: g est strictement décroissante.
3. c. $f'(0) = 0{,}5$ et $g'(0) = -0{,}5$: tangentes de pentes $0{,}5$ et $-0{,}5$, toutes deux au point $(0\,;1)$.
4. d. Pour tout t, $g(t) = \mathrm{e}^{0{,}5\times(-t)} = f(-t)$: le point $(t\,;g(t))$ est le symétrique de $(-t\,;f(-t))$ par rapport à l'axe des ordonnées.
5. Les deux courbes passent par $(0\,;1)$, restent au-dessus de l'axe des abscisses et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

---

6 **Décroissance radioactive. Le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon, t jours après le début de l'observation, est modélisé par $N(t) = 8000\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.**

1. a. $N(0) = 8000\,\mathrm{e}^0 = 8000$. $N(5) = 8000\,\mathrm{e}^{-0{,}5}$, avec $\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}606531$:
   $8000 \times 0{,}606531 \approx 4852$
2. b. $N(t+1) = 8000\,\mathrm{e}^{-0{,}1t-0{,}1} = \mathrm{e}^{-0{,}1} \times 8000\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = \mathrm{e}^{-0{,}1} \times N(t)$.
3. Chaque jour, N est multiplié par $\mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}904837$; la baisse relative vaut :
   $1 - 0{,}904837 = 0{,}095163$
4. soit une baisse d'environ 9,52 % par jour, et non de 10 %.
5. c. $N'(t) = 8000 \times (-0{,}1)\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = -800\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} < 0$: N est strictement décroissante.
   $8000 \times (-0{,}1) = -800$
6. d. N est décroissante ; on teste les entiers. $N(6) = 8000\,\mathrm{e}^{-0{,}6}$, avec $\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}548812$:
   $8000 \times 0{,}548812 \approx 4390{,}5$
7. $N(7) = 8000\,\mathrm{e}^{-0{,}7}$, avec $\mathrm{e}^{-0{,}7} \approx 0{,}496585$:
   $8000 \times 0{,}496585 \approx 3972{,}7$
8. $N(6) > 4000$ et $N(7) < 4000$: il reste moins de 4 000 noyaux au bout de 7 jours.

---

7 **Méthode d'Euler. On approche la fonction exponentielle sur $[0\,;1]$ avec le pas $h = 0{,}25$: $y_0 = 1$ et $y_{k+1} = (1+h)\,y_k$.**

1. a. Chaque pas multiplie par $1{,}25$: $y_1 = 1{,}25$, puis
   $1{,}25 \times 1{,}25 = 1{,}5625$
2. $y_2 = 1{,}5625$, puis
   $1{,}5625 \times 1{,}25 = 1{,}953125$
3. $y_3 = 1{,}953125$, puis
   $1{,}953125 \times 1{,}25 = 2{,}44140625$
4. y_1, y_2, y_3 et $y_4 \approx 2{,}4414$ approchent $\mathrm{e}^{0{,}25}$, $\mathrm{e}^{0{,}5}$, $\mathrm{e}^{0{,}75}$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
5. b. (y_k) est géométrique de premier terme 1 et de raison $1{,}25$: $y_k = 1{,}25^k$.
6. c. Avec $h = \dfrac{1}{1000}$ et 1 000 pas, elle calcule $\left(1 + \dfrac{1}{1000}\right)^{1000}$, qui approche $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.
7. d. Sur chaque pas, la méthode garde la pente du début. Or la pente de la courbe, égale à e^x, augmente avec x : chaque pas monte moins que la courbe.
8. Les écarts s'accumulent d'un pas à l'autre : au pas 0,25, on obtient $2{,}44$ au lieu de $\mathrm{e} \approx 2{,}72$, valeur approchée par défaut.

---

8 **Une démonstration d'unicité. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = 2f$ et $f(0) = 3$. On pose $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.**

1. a. Dérivée d'un produit, avec $\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)' = -2\,\mathrm{e}^{-2x}$: $g'(x) = f'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2f(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.
2. Comme $f'(x) = 2f(x)$, $g'(x) = 2f(x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2f(x)\,\mathrm{e}^{-2x} = 0$.
3. b. g a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$: elle est constante, égale à $g(0) = f(0)\,\mathrm{e}^{0} = 3$.
   $3 \times 1 = 3$
4. c. $f(x)\,\mathrm{e}^{-2x} = 3$, donc $f(x) = \dfrac{3}{\mathrm{e}^{-2x}} = 3\,\mathrm{e}^{2x}$.
5. Vérification : $\left(3\,\mathrm{e}^{2x}\right)' = 6\,\mathrm{e}^{2x} = 2 \times 3\,\mathrm{e}^{2x}$ et $3\,\mathrm{e}^{0} = 3$: la seule fonction possible convient, donc $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x}$.
   $2 \times 3 = 6$

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Transformer une expression avec les règles de calcul	3 pts	Une somme $\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{b}$ « simplifiée » en e^{a+b}, ou des exposants multipliés dans un produit
Résoudre une équation ou une inéquation exponentielle	4 pts	Passer aux exposants sans avoir écrit chaque membre comme une seule exponentielle ; une solution du produit nul oubliée
Dériver e^{at} ou un produit, et étudier les variations	4 pts	Le facteur a oublié ; un signe conclu sans écrire $\mathrm{e}^{\cdots} > 0$
Modéliser : coefficient multiplicateur et taux par unité de temps	4 pts	Prendre k pour le taux ; un résultat sans unité, ou sans l'arrondi demandé
Représenter e^{kt} et e^{-kt}	2 pts	Une courbe qui touche l'axe des abscisses, ou qui ne passe pas par $(0\,;1)$
Démontrer avec un produit de dérivée nulle	3 pts	Conclure à une fonction constante sans avoir calculé sa dérivée, ou sans donner la valeur en 0