COURS

1re

Fonction exponentielle — Définition, propriétés et variations

Programme de spécialité mathématiques de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602917A

Une fonction égale à sa propre dérivée : c'est ainsi que l'on définit l'exponentielle, et tout le chapitre en découle. **La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$; elle transforme les sommes en produits, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$, et elle est strictement positive et strictement croissante.** Elle décrit en temps continu ce que les suites géométriques décrivent pas à pas : un capital placé, une dilution, une décroissance radioactive.

1 Définition et relations algébriques

DÉFINITION

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$; l'existence et l'unicité sont **admises**. C'est la **fonction exponentielle**, notée $\exp$. En chaque point de sa courbe, la pente est égale à l'ordonnée.

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

PROPRIÉTÉ

Dérivée de $t \mapsto \exp(at)$ (démontrée). Pour tout réel a, la fonction $t \mapsto \exp(at)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto a\exp(at)$. *Preuve*, pour $a \neq 0$: avec $H = ah$, le taux de variation s'écrit $\dfrac{\exp(at+ah)-\exp(at)}{h} = a \times \dfrac{\exp(at+H)-\exp(at)}{H}$, et le dernier quotient tend vers $\exp'(at) = \exp(at)$ quand h, donc H, tend vers 0. De même, $x \mapsto \exp(x+b)$ a pour dérivée $x \mapsto \exp(x+b)$.

PROPRIÉTÉ

Relations algébriques (démontrées). Pour tous réels x et y, $\exp(x)\exp(-x) = 1$, donc $\exp(x) \neq 0$, et $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. *Preuves* : $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$ a pour dérivée $\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$; une fonction de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ est constante, donc $g(x) = g(0) = 1$. À y fixé, $u(x) = \exp(x+y)\exp(-x)$ a de même une dérivée nulle : $u(x) = u(0) = \exp(y)$, et l'on multiplie par $\exp(x)$.

Pour aller plus loin : l'unicité. Si $f' = f$ et $f(0) = 1$, la fonction $x \mapsto f(x)\exp(-x)$ a une dérivée nulle : elle vaut partout $f(0) = 1$, d'où $f(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)} = \exp(x)$. Les trois preuves font le même geste : un produit de dérivée nulle est constant.

DÉFINITION

On pose $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718$. La relation fonctionnelle donne $\exp(n) = \mathrm{e}^n$ pour tout entier relatif n ; on **étend** l'écriture à tout réel : e^x désigne $\exp(x)$. Les relations démontrées deviennent les règles des puissances.

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a} \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad (\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$$

TRANSFORMER UNE EXPRESSION

1. **Tout écrire en puissances de** e : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$, $1 = \mathrm{e}^0$, $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.
2. **Travailler sur les exposants** : les **ajouter** pour un produit, les **soustraire** pour un quotient, les **multiplier** par n pour une puissance n-ième.
3. **Laisser les sommes** : $\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$ se factorise ou se développe, mais ne se « simplifie » pas.
   contrôler en $x = 0$: l'expression de départ et le résultat doivent donner la même valeur.

EXEMPLE

Simplifier $A = \dfrac{\mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x-3}}$ pour tout réel x.

(1) Exposant du numérateur, un produit : $(2x+1)+(-x) = x+1$. Puis le quotient : $(x+1)-(x-3) = 4$.

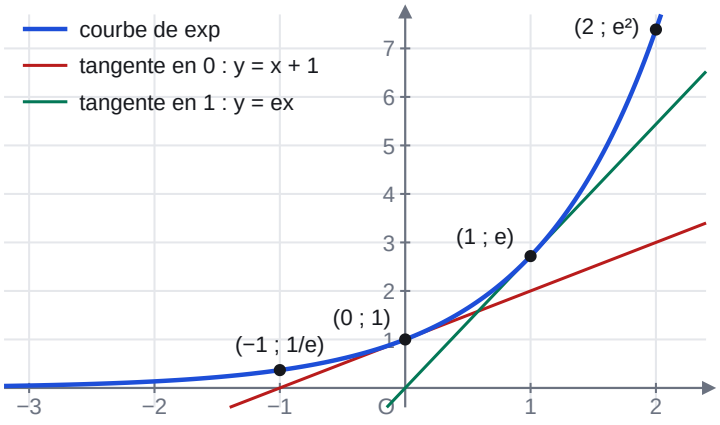
(2) Contrôle en $x = 0$: $\dfrac{\mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^{-3}}$ a pour exposant $1+0-(-3) = 4$

$A = \mathrm{e}^4$, qui ne dépend pas de x.

2 Signe, variations et courbe

PROPRIÉTÉ

Signe et variations (démontrés). Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$: en effet $\mathrm{e}^x = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$, et $\mathrm{e}^x \neq 0$. Sa dérivée, qui est elle-même, est donc strictement positive : la fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$ et $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$; en particulier, $\mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$.



x	−∞	0	1	+∞
exp′(x)		+		
exp(x)		1		e

valeurs arrondies au centième

x	−2	−1	0	1	2
e^x	0,14	0,37	1	2,72	7,39

e ≈ 2,718 ; la courbe reste au-dessus de l'axe des abscisses

La courbe passe par $(0\,;1)$ et $(1\,;\mathrm{e})$, au-dessus de l'axe des abscisses. Tangente en 0 : $y = x+1$, d'où $\mathrm{e}^h \approx 1+h$ près de 0 (fiche « Dérivation »). Tangente en 1 : $y = \mathrm{e}\,x$, qui passe par l'origine.

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION OU UNE INÉQUATION

(1) **Écrire chaque membre comme une seule exponentielle** e^A et e^B ; un 1 s'écrit e^0.

(2) **Passer aux exposants** : $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B \iff A = B$ et $\mathrm{e}^A < \mathrm{e}^B \iff A < B$, **dans le même sens**, puis résoudre.

(3) **Pour un produit** $(ax+b)\,\mathrm{e}^u$, le facteur e^u est strictement positif : le signe est celui de $ax+b$.

une équation comme $\mathrm{e}^x = 3$ se résout en première graphiquement ou à la calculatrice : $x \approx 1{,}1$.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x+2}$, puis l'inéquation $\mathrm{e}^{3x-1} \leq 1$.

(1) L'équation équivaut à $x^2 - x - 2 = 0$, soit $(x-2)(x+1) = 0$: $x = 2$ ou $x = -1$. Contrôle pour $x = -1$: $(-1)^2 = -1+2 = 1$

(2) L'inéquation s'écrit $\mathrm{e}^{3x-1} \leq \mathrm{e}^0$, donc $3x - 1 \leq 0$, soit $x \leq \dfrac{1}{3}$.

Équation : $\mathcal{S} = \{-1\,;2\}$. Inéquation : $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right]$.

PIÈGE

Écrire $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$, ou $\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{ab}$. — l'exponentielle change une **somme d'exposants** en **produit**, rien d'autre : $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$.

Ce que ça coûte : la simplification, et l'équation qui en dépend.

Le réflexe : tester en $x = 0$: $\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 = 2$, mais $\mathrm{e}^0 = 1$.

PIÈGE

Croire e^{-3} négatif, « parce que l'exposant l'est ». — $\mathrm{e}^{-3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} \approx 0{,}05$: une exponentielle est **toujours strictement positive**.

Ce que ça coûte : le tableau de signe, et les variations qui en découlent.

Le réflexe : écrire « $\mathrm{e}^{\cdots} > 0$ » avant tout tableau de signe.

PIÈGE

Dériver e^{3t} en e^{3t}, ou en $3t\,\mathrm{e}^{3t-1}$. — le facteur $a = 3$ est oublié, ou l'exponentielle est traitée comme x^n. La dérivée est $3\,\mathrm{e}^{3t}$.

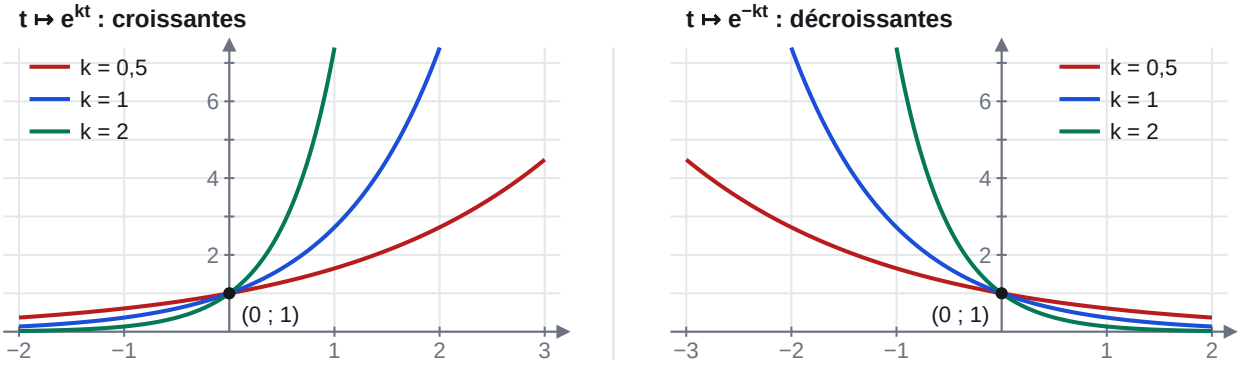
Ce que ça coûte : la dérivée, son signe et le tableau de variations.

Le réflexe : faire passer devant le coefficient de t ; l'exponentielle ne change pas.

3 Croissance et décroissance exponentielles

PROPRIÉTÉ

La dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ est $t \mapsto a\,\mathrm{e}^{at}$, du signe de a. Pour $k > 0$, $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ est donc **strictement croissante** et $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ **strictement décroissante**. Les deux valent 1 en 0, avec une tangente de pente k ou $-k$: plus k est grand, plus la variation est rapide. Comme $\mathrm{e}^{-kt} = \mathrm{e}^{k\times(-t)}$, leurs courbes sont **symétriques** par rapport à l'axe des ordonnées.



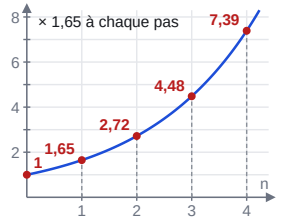
Toutes les courbes passent par $(0\,;1)$ et restent au-dessus de l'axe des abscisses. À droite, chaque courbe est la symétrique de celle de même couleur à gauche.

TRACER LA COURBE D'UNE EXPONENTIELLE DE PARAMÈTRE K

1. **Dresser un tableau de valeurs** à la calculatrice, à pas régulier : $t = -2, -1, 0, 1, 2\ldots$
2. **Placer $(0\,;1)$ et sa tangente**, de coefficient directeur k ou $-k$; le sens de variation vient du signe de la dérivée.
3. **Tracer** une courbe régulière, toujours au-dessus de l'axe des abscisses, qui s'en rapproche du côté où la fonction diminue.

PROPRIÉTÉ

Lien avec les suites géométriques. Pour tout réel a, la suite $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est **géométrique de raison** e^{a}, car $u_{n+1} = \mathrm{e}^{na+a} = \mathrm{e}^{a} \times u_n$. Une évolution continue $t \mapsto C_0\,\mathrm{e}^{kt}$ est donc, période après période, une évolution à **taux fixe** $\mathrm{e}^{k} - 1$: c'est le pont entre le temps discret et le temps continu.



$u_n = \mathrm{e}^{0,5n}$: chaque terme vaut le précédent fois $\mathrm{e}^{0,5} \approx 1{,}65$.

MODÉLISER UNE CROISSANCE OU UNE DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE

1. **Reconnaître le modèle** $f(t) = f(0)\,\mathrm{e}^{kt}$: $k > 0$ pour une croissance (capital), $k < 0$ pour une décroissance (dilution, radioactivité).
2. **Traduire en taux** : par unité de temps, la grandeur est multipliée par e^{k} ; le taux d'évolution est $\mathrm{e}^{k} - 1$, en pourcentage.
3. **Conclure dans le contexte**, avec l'unité et l'arrondi demandés.

EXEMPLE

Un capital, en euros, vaut $C(t) = 2000\,\mathrm{e}^{0{,}05t}$ au bout de t années. Calculer $C(10)$ et le taux annuel, puis comparer avec un placement à 5 % par an à intérêts composés.

1. $C(10) = 2000\,\mathrm{e}^{0{,}5}$, avec $\mathrm{e}^{0{,}5} \approx 1{,}648721$:
   $2000 \times 1{,}648721 \approx 3297{,}44$
2. $C(t+1) = \mathrm{e}^{0{,}05}\,C(t)$ et $\mathrm{e}^{0{,}05} \approx 1{,}0513$: taux annuel d'environ 5,13 %. À 5 % par an, au bout de dix ans :
   $2000 \times 1{,}05^{10} \approx 3257{,}79$

$C(10) \approx 3\,297{,}44$ **€ : le modèle continu, à 5,13 % par an environ, rapporte 39,65 € de plus.**

PIÈGE

Lire $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ comme « une baisse de 10 % par unité de temps ». — le coefficient multiplicateur est $\mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}9048$, soit une baisse d'environ 9,52 %. Le nombre k n'est pas un taux ; il n'en est proche que s'il est petit.

Ce que ça coûte : le pourcentage demandé, et toute comparaison avec un modèle à taux fixe.

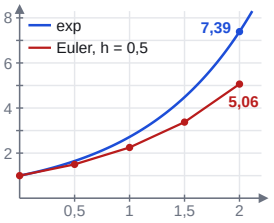
Le réflexe : calculer e^{k} à la calculatrice, puis le taux $\mathrm{e}^{k} - 1$.

4 Approcher l'exponentielle : Euler et le nombre e

CONSTRUIRE L'EXPONENTIELLE PAR LA MÉTHODE D'EULER

1. **Partir de** $(0\,;1)$ et choisir un pas $h > 0$. L'approximation affine $f(x+h) \approx f(x) + h\,f'(x)$ donne, puisque $f' = f$, $f(x+h) \approx (1+h)\,f(x)$.
2. **Répéter** : $y_0 = 1$ et $y_{k+1} = (1+h)\,y_k$. La suite est géométrique : $y_k = (1+h)^k$ approche e^{kh}.
3. **Atteindre 1 en n pas**, avec $h = \dfrac{1}{n}$: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \approx \mathrm{e}$, d'autant mieux que n est grand.

   la méthode sous-estime : sur chaque pas, elle garde la pente du début, alors que la pente de la courbe augmente.



Au pas 0,5 : $1{,}5^4 \approx 5{,}06$ *en 2, au lieu de* $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$.

EXEMPLE

Approcher e^2 par la méthode d'Euler, avec le pas $h = 0{,}5$.

1. Quatre pas mènent de 0 à 2, et chacun multiplie par $1 + h = 1{,}5$:
   $1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 5{,}0625$

Euler donne $5{,}0625$, alors que $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$: il faut un pas bien plus petit.

méthode d'Euler et suite $(1 + 1/n)^n$: deux écritures du même calcul

```
def euler(n):                # n pas de longueur h = 1/n, de 0 à 1
    h = 1 / n
    y = 1                    # f(0) = 1
    for k in range(n):
        y = y + h * y        # f(x + h) ≈ f(x) + h × f'(x), et f' = f
    return y                 # valeur approchée de f(1) = e
for n in [10, 100, 1000]:
    print(n, round(euler(n), 10), round((1 + 1/n)**n, 10))
```

La boucle calcule exactement $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *:* $2{,}5937$ *pour* $n = 10$, $2{,}7048$ *pour 100,* $2{,}7169$ *pour 1 000, contre* $\mathrm{e} \approx 2{,}7183$. *La convergence est lente.*

À VÉRIFIER

- Chaque membre est-il écrit comme **une seule exponentielle** avant de passer aux exposants ?
- Ai-je **ajouté** les exposants d'un produit, sans toucher à une somme $\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$?
- Ai-je écrit $\mathrm{e}^{\cdots} > 0$ dans chaque étude de signe ?
- Ai-je dérivé e^{at} en $a\,\mathrm{e}^{at}$, facteur a compris ?
- Ai-je traduit e^{kt} en **taux** $\mathrm{e}^k - 1$, et non en k ?
- Ma courbe passe-t-elle par $(0\,;1)$, sans toucher l'axe des abscisses ?

À RETENIR

- $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$; $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 \approx 2{,}718$.
- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$ · $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$ · $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$; une somme $\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$ ne se simplifie pas.
- $\mathrm{e}^x > 0$ toujours ; $\exp$ strictement croissante : $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$.
- $(\mathrm{e}^{at})' = a\,\mathrm{e}^{at}$: pour $k > 0$, e^{kt} croît et e^{-kt} décroît.
- $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est géométrique de raison e^a ; le taux par période est $\mathrm{e}^k - 1$, pas k.
- Euler : $y_{k+1} = (1+h)\,y_k$, et $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \approx \mathrm{e}$.