EXERCICES

Fonction exponentielle — Définition, propriétés et variations

1re

Nom : _____
Classe : _____

> Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 Écrire sous la forme d'une seule exponentielle, ou développer.

●○○

a. $\mathrm{e}^{3} \times \mathrm{e}^{-5}$

b. $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{2}\right)^{3}}{\mathrm{e}^{4}}$

c. $\mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{1-x}$, pour tout réel x

d. $\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}$, à développer et réduire

2 Vrai ou faux ? Justifier.

●○○

a. « Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x} = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}$. »

b. « Pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{b} = \mathrm{e}^{a+b}$. »

c. « Le nombre e^{-2} est négatif. »

d. « La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-3t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. »

e. « Si $\mathrm{e}^{a} < \mathrm{e}^{b}$, alors $a < b$. »

f. « La suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{0,2n}$ est arithmétique. »

Énoncé	Ta réponse	Pourquoi ?
a. « Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x} = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}$. »		
b. « Pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{b} = \mathrm{e}^{a+b}$. »		
c. « Le nombre e^{-2} est négatif. »		
d. « La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-3t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. »		
e. « Si $\mathrm{e}^{a} < \mathrm{e}^{b}$, alors $a < b$. »		
f. « La suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{0,2n}$ est arithmétique. »		

3 **Résoudre dans $\mathbb{R}$.** ●●○

a. $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{x+3}$

b. $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{4x} \times \mathrm{e}^{-3}$

c. $\mathrm{e}^{3x} \leq \mathrm{e}^{8-x}$

d. $(2x-6)\,\mathrm{e}^{x} > 0$

4 **On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$.** ●●○

a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

c. En déduire que, pour tout réel x, $(x-1)\,\mathrm{e}^{x} \geq -1$.

d. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

5 **Pour $k = 0{,}5$, on considère $f(t) = \mathrm{e}^{0{,}5t}$ et $g(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$.** ●●○

a. Dresser le tableau des valeurs de f et de g, arrondies au centième, pour $t = -2$, -1, 0, 1, 2 et 4.

b. Donner le sens de variation de chaque fonction, en le justifiant par la dérivée.

c. Donner le coefficient directeur de la tangente en $t = 0$ à chaque courbe.

d. Tracer les deux courbes dans un même repère, sur $[-2\,;4]$, avec 1 cm pour une unité sur chaque axe. Expliquer pourquoi elles sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

6 **Décroissance radioactive. Le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon, t jours après le début de l'observation, est modélisé par $N(t) = 8000\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.** ●●○

a. Calculer $N(0)$, puis $N(5)$ arrondi à l'unité.

b. Montrer que $N(t+1) = \mathrm{e}^{-0{,}1} \times N(t)$. En déduire le pourcentage de baisse par jour, arrondi à 0,01 %.

c. Étudier le sens de variation de N à l'aide de sa dérivée.

d. À l'aide de la calculatrice, déterminer le premier nombre entier de jours au bout duquel il reste moins de 4 000 noyaux.

7 **Méthode d'Euler. On approche la fonction exponentielle sur $[0\,;1]$ avec le pas $h = 0{,}25$: $y_0 = 1$ et $y_{k+1} = (1+h)\,y_k$.** ●●●

a. Calculer y_1, y_2, y_3 et y_4. Quels nombres approchent-ils ?

b. Exprimer y_k en fonction de k, en reconnaissant une suite de référence.

c. La fonction Python *euler* du cours, appelée avec $n = 1000$, renvoie $2{,}7169\ldots$ Quelle expression calcule-t-elle, et quel nombre approche-t-elle ?

d. Expliquer pourquoi les valeurs obtenues sont inférieures aux valeurs exactes.

8 **Une démonstration d'unicité. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = 2f$ et $f(0) = 3$. On pose $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.** ●●●

a. Calculer $g'(x)$ et montrer qu'il est nul pour tout réel x.

b. En déduire la valeur de $g(x)$ pour tout réel x.

c. Conclure que $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x}$, puis vérifier que cette fonction convient.

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Fonction exponentielle — Définition, propriétés et variations ».