

Fonctions trigonométriques — cercle, formules d'addition et équations

Corrigé détaillé
7 exercices

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Donner les valeurs exactes.

- ① a. Lecture directe sur le tableau des valeurs remarquables.

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- ② b. Le cosinus est pair, le sinus impair.

$$\cos = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin = -\frac{1}{2}.$$

- ③ c. Un tour complet ne change rien.

$$2 - 2 = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2 Utiliser l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

- ① a. On isole : $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$.

$$1 - 0.36 = 0.64$$

- ② On prend la racine, positive car x est dans le premier quadrant.

$$\sqrt{0.64} = 0.8$$

$$\sin x = \frac{4}{5}.$$

- ③ b. Le carré est le même, mais le sinus est négatif sous l'axe.

$$0 - 0.8 = -0.8$$

$$\sin x = -\frac{4}{5} : \text{c'est le quadrant qui décide du signe, pas le calcul.}$$

3 Placer sur le cercle et lire les signes.

- ① a. $\frac{2\pi}{3}$ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

deuxième quadrant, en haut à gauche.

- ② b. À gauche de l'axe vertical, au-dessus de l'axe horizontal.

$$0 - 1 = -1$$

cosinus négatif, sinus positif.

- ③ c. $\frac{7\pi}{6}$ dépasse π d'un sixième de tour.

$$\frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

troisième quadrant : cosinus et sinus tous deux négatifs. Le quadrant donne les deux signes sans aucun calcul.

4 Appliquer les formules d'addition.

- ① a. $\cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2}$, avec $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

$$0 - 1 = -1$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

- ② b. $\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi$, avec $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$.

$$-1 + 0 = -1$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x.$$

- ③ c. Décaler la courbe du sinus d'un quart de période et la retourner donne celle du cosinus.

c'est exactement ce que montre la figure du cours : deux courbes identiques, décalées.

5 Linéariser, puis simplifier.

- ① a. La formule de duplication donne $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$.
 $2 - 1 = 1$
- ② On isole $\cos^2 x$.
 $\frac{1+1}{2} = 1$
 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; contrôle en $x = 0$: les deux membres valent 1.
- ③ b. C'est directement la formule de duplication du cosinus.
 $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

6 Résoudre sur $[0 ; 2\pi]$.

- ① a. Solution évidente $\frac{\pi}{4}$; pour un sinus, la seconde est $\pi - \alpha$.
 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
 $S = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\}$.
- ② b. $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; pour un cosinus, la seconde est l'opposé, ramené dans l'intervalle.
 $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
 $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right\}$.
- ③ c. Le cosinus est borné par 1.
 $3 - 1 = 2$
aucune solution : $S = \emptyset$. Le dire suffit, aucun calcul n'est nécessaire.

7 La hauteur d'eau dans un port, en mètres, est modélisée par $h(t) = 4 + 2 \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right)$, où t est l'heure écoulée depuis minuit.

- ① a. À $t = 0$, le cosinus vaut 1.
 $4 + 2 \times 1 = 6$
- ② À $t = 6$, l'argument vaut π et le cosinus -1 .
 $4 - 2 = 2$
6 m à marée haute, 2 m à marée basse.
- ③ b. Le cosinus décrit tout l'intervalle $[-1 ; 1]$.
 $4 - 2 = 2$
la hauteur varie entre 2 m et 6 m.
- ④ c. Un tour complet est parcouru quand l'argument augmente de 2π , soit quand t augmente de 12.
 $2 \times 6 = 12$
la période est de 12 heures — deux marées par jour, ce qui est bien ce qu'on observe.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Valeurs remarquables exactes	3 pts	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$ intervertis
Parité et périodicité utilisées	3 pts	$\sin(-x)$ traité comme $\sin x$
Formule d'addition avec le bon signe	4 pts	Un $+$ à la place du $-$ dans $\cos(a + b)$
Signe déduit du quadrant	3 pts	Une racine carrée prise positive sans vérifier
Les deux solutions du tour	4 pts	Une seule famille de solutions donnée
Retour au contexte et unité	3 pts	Une période annoncée sans heures