

COURS

Fonctions trigonométriques — cercle, formules d'addition et équations

1^{re}

Programme de première générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

En seconde, le sinus et le cosinus étaient des rapports dans un triangle rectangle : ils n'existaient que pour des angles aigus. Le **cercle trigonométrique** les libère de cette contrainte. Ils deviennent les coordonnées d'un point qui tourne, définies pour **tout** réel, et deviennent du même coup des **fonctions** — que l'on peut dériver, dont on peut étudier les variations, et qui décrivent tout ce qui se répète : une marée, un courant alternatif, un battement.

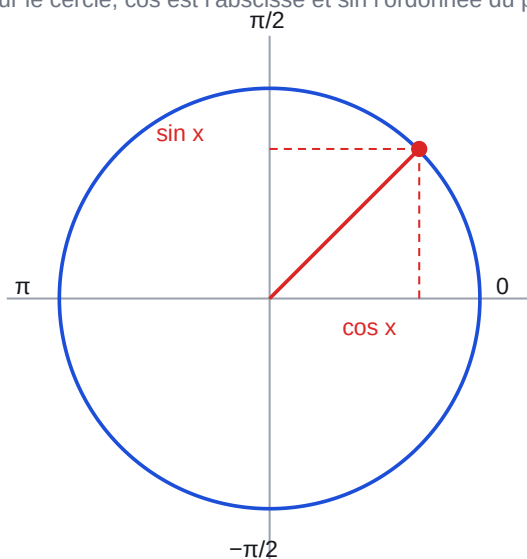
1 Le cercle trigonométrique

DÉFINITION

On enroule la droite des réels sur le cercle de centre O et de rayon 1. Tout réel x vient alors se poser en un point M du cercle, appelé son **point image**. Par définition, $\cos x$ est l'**abscisse** de M et $\sin x$ son **ordonnée**. Le théorème de Pythagore appliqué au rayon donne immédiatement l'identité fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, vraie pour tout réel sans exception.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

sur le cercle, cos est l'abscisse et sin l'ordonnée du point image



valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

la ligne des sinus est celle des cosinus, lue à l'envers

$\cos(-x) = \cos x$ — le cosinus est pair

$\sin(-x) = -\sin x$ — le sinus est impair

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, pour tout réel x

période 2π : ajouter un tour ne change rien

Le cercle trigonométrique, les valeurs remarquables et les trois identités à connaître.

RÈGLE

Trois propriétés se lisent directement sur le cercle et évitent presque tous les calculs. La **périodicité** : ajouter un tour complet ramène au même point, donc $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. La **parité** : $-x$ est le symétrique de x par rapport à l'axe des abscisses, donc le cosinus est **pair** et le sinus **impair**. Enfin, $\cos x$ et $\sin x$ sont toujours **compris entre -1 et 1** — une équation $\cos x = 2$ n'a donc aucune solution, et le dire suffit à la résoudre.

$$\cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin x$$

Les **valeurs remarquables** ne se retiennent pas une par une : la ligne des sinus est celle des cosinus lue à l'envers. En écrivant les numérateurs $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ sur 2 pour le sinus de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ — cinq valeurs, une seule règle, et le

2 Les formules d'addition

RÈGLE

Le cosinus et le sinus ne se distribuent pas sur une somme : il faut ces formules, et elles sont au programme. Deux signes sont à surveiller — le cosinus **inverse** le signe, le sinus le **conserve**. En posant $b = a$, on obtient les formules de **duplication**, dont on tire les deux formes utiles à la **linéarisation** : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$, qui abaissent un carré en un cosinus de degré un.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$. — un contre-exemple suffit à le réfuter : avec $a = b = \frac{\pi}{2}$, le membre de gauche vaut $\cos \pi = -1$, tandis que le membre de droite vaut $0 + 0 = 0$. Le cosinus n'est pas une fonction linéaire, et aucune fonction trigonométrique ne l'est.

Le réflexe : au moindre doute, tester sur 0 et sur $\frac{\pi}{2}$. Une formule fausse tombe en trois secondes ; une formule juste survit, et l'on continue en confiance.

EXEMPLE

Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

① On écrit $\frac{\pi}{12}$ comme une différence de deux angles remarquables : $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

② Donc $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, et l'on applique $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

③ Le premier produit vaut $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, le second $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}.$$

④ On additionne les deux fractions, qui ont déjà le même dénominateur.

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

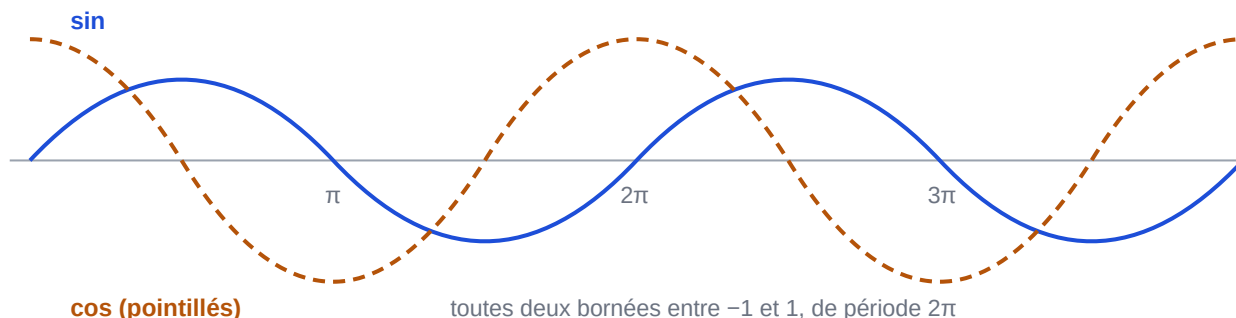
3 Les fonctions sinus et cosinus

PROPRIÉTÉ

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$ — le signe moins est la seule chose à ne pas oublier. Elles sont **périodiques de période 2π** , ce qui permet de n'étudier qu'un intervalle de longueur 2π et de reproduire ensuite la courbe par translations. La parité réduit encore le travail : il suffit d'étudier le cosinus sur $[0; \pi]$, puis de compléter par symétrie.

$$(\sin x)' = \cos x \quad ; \quad (\cos x)' = -\sin x$$

deux courbes identiques, décalées d'un quart de période



Les deux courbes ont la même forme, décalées d'un quart de période.

Résoudre une équation trigonométrique

RÉSOUTRE $\cos X = A$ OU $\sin X = A$

- ① **Vérifier que a est entre -1 et 1 .** Sinon, il n'y a aucune solution, et c'est la réponse complète.
- ② **Trouver une solution évidente α** parmi les valeurs remarquables : c'est presque toujours ce qu'attend l'énoncé.
- ③ **Ajouter la seconde solution du tour**, donnée par la symétrie. Pour un cosinus, c'est $-\alpha$ — symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Pour un sinus, c'est $\pi - \alpha$ — symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
c'est là que se perdent les points : une seule des deux solutions est donnée, et la moitié de la réponse manque.
- ④ **Ajouter $2k\pi$** , avec k entier, à chacune des deux familles — sauf si l'énoncé restreint l'intervalle, auquel cas on ne retient que les solutions qui y tombent.

EXEMPLE

Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$.

- ① La valeur $\frac{1}{2}$ est bien entre -1 et 1 , et c'est une valeur remarquable : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- ② La seconde solution du tour est $-\frac{\pi}{3}$, qu'on ramène dans l'intervalle en ajoutant 2π : $2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.
 $2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$
- ③ Les deux solutions de l'intervalle sont donc $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

contrôle : les deux points images sont bien symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et ont donc la même abscisse.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

À VÉRIFIER

- Ai-je vérifié que la valeur cherchée est bien dans $[-1 ; 1]$?
- Ai-je donné les **deux** solutions du tour, et non une seule ?
- Ai-je utilisé $-\alpha$ pour un cosinus et $\pi - \alpha$ pour un sinus ?
- Ai-je ajouté $2k\pi$, ou restreint à l'intervalle demandé ?
- Dans $\cos(a + b)$, ai-je bien **inversé** le signe entre les deux produits ?
- Ai-je écrit le signe moins dans $(\cos x)' = -\sin x$?

À RETENIR

- Sur le cercle : $\cos x$ est l'abscisse, $\sin x$ l'ordonnée du point image.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, pour tout réel.
- Période 2π : cosinus **pair**, sinus **impair**.
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ — le signe s'inverse.
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ — le signe se conserve.
- $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$.
- Une équation en $\cos$ a deux solutions par tour : α et $-\alpha$; en $\sin$: α et $\pi - \alpha$.