

COURS

Géométrie dans l'espace — solides, positions relatives et sections

1^{re}

Programme de première générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Dans le plan, deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles. Dans l'espace, c'est **faux** — et cette seule phrase contient la moitié des erreurs du chapitre. Deux arêtes d'un cube peuvent parfaitement n'avoir aucun point commun sans être parallèles : elles ne sont simplement pas dans le même plan. Raisonner dans l'espace, c'est d'abord se demander, à chaque étape, si les objets qu'on compare sont **coplanaires**.

1 Les solides usuels

RÈGLE

Les volumes se rangent en deux familles, et la mémoire n'a qu'une chose à retenir : **tout ce qui se termine en pointe vaut un tiers de ce qui ne pointe pas**. Un cylindre vaut sa base multipliée par sa hauteur ; un cône de même base et même hauteur en vaut le tiers. Un prisme vaut base × hauteur ; une pyramide de même base et même hauteur en vaut le tiers. La sphère est à part : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ pour le volume, $\mathcal{A} = 4\pi r^2$ pour l'aire — le rayon au cube d'un côté, au carré de l'autre, et jamais l'inverse.

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi r^2 h}{3} ; \quad V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

un tiers pour tout ce qui se termine en pointe

solide	volume	à retenir
pavé droit	$L \times l \times h$	base × hauteur
cylindre	$\pi r^2 h$	base × hauteur
pyramide	$(\text{base} \times h) / 3$	un tiers : elle pointe
cône	$\pi r^2 h / 3$	un tiers : il pointe
sphère	$4 \pi r^3 / 3$	aire : $4 \pi r^2$

Les volumes usuels, et la règle du tiers pour les solides pointus.

EXEMPLE

Un silo est formé d'un cylindre de rayon 5 m et de hauteur 10 m, surmonté d'une demi-sphère de même rayon. Calculer son volume exact.

① Le cylindre vaut $\pi r^2 h$, avec $r^2 = 25$.

$$25 \times 10 = 250$$

soit $250\pi \text{ m}^3$.

② La demi-sphère vaut la moitié de $\frac{4}{3}\pi r^3$, donc $\frac{2}{3}\pi r^3$, avec $r^3 = 125$.

$$5^3 = 125$$

③ Cela donne $\frac{250}{3}\pi \text{ m}^3$.

$$2 \times 125 = 250$$

④ On additionne en mettant au même dénominateur : $250 = \frac{750}{3}$.

$$250 \times 3 = 750$$

⑤ D'où le total.

$$750 + 250 = 1000$$

$\frac{1000\pi}{3} \approx 1047 \text{ m}^3$. On garde π jusqu'au bout : arrondir en cours de route déplace le résultat.

$$V = \frac{1000\pi}{3} \text{ m}^3, \text{ soit environ } 1\,047 \text{ m}^3.$$

2 Droites et plans

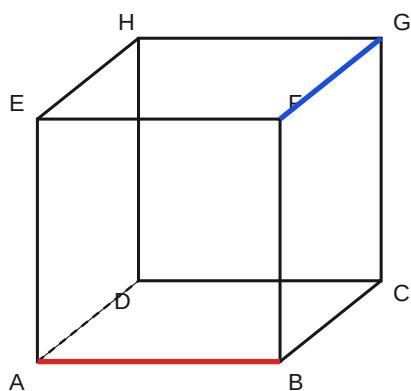
RÈGLE

Deux droites de l'espace relèvent de trois cas, et de trois seulement. Si elles sont **coplanaires**, elles sont soit **sécantes** — un point commun —, soit **parallèles** — aucun. Si elles ne sont pas coplanaires, elles n'ont aucun point commun **et** ne sont pas parallèles : il n'existe aucun plan qui les contienne toutes deux. Une droite et un plan sont sécants en un point, ou parallèles. Deux plans sont sécants **selon une droite** — jamais en un seul point — ou parallèles.

DÉFINITION

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** lorsque leurs directions font un angle droit, qu'elles se coupent ou non. Le mot **perpendiculaires** est réservé au cas où elles sont en plus **sécantes**. La distinction n'est pas un caprice de vocabulaire : dans un cube, l'arête (AB) et l'arête (CG) sont orthogonales sans avoir le moindre point commun, et écrire « perpendiculaires » serait faux.

dans l'espace, deux droites peuvent ne pas se couper sans être parallèles



trois cas, et trois seulement

(AB) et (FG) : non coplanaires

elles ne se coupent pas, et ne sont pas parallèles

(AB) et (EF) : parallèles

coplanaires, sans point commun

(AB) et (BC) : sécantes en B

coplanaires, un point commun

(AB) est orthogonale à (BF) — perpendiculaires ici, car sécantes

Les trois positions relatives de deux droites, lues sur un cube.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Conclure que deux droites sans point commun sont parallèles. — c'est vrai dans le plan, faux dans l'espace. Dans un cube $ABCDEFGH$, les droites (AB) et (FG) ne se rencontrent jamais et ne sont pas parallèles : aucun plan ne les contient toutes deux. La conclusion « donc parallèles » fait alors basculer tout le raisonnement.

Le réflexe : avant de conclure au parallélisme, exhiber le **plan** qui contient les deux droites. Si l'on n'en trouve pas — par exemple une face ou un plan diagonal du solide —, elles ne sont pas coplanaires.

PROPRIÉTÉ

Deux propriétés suffisent à démontrer presque tous les parallélismes du programme. Si deux droites sont **parallèles à une même troisième**, elles sont parallèles entre elles. Et si une droite d est parallèle à une droite d' **contenue dans un plan $\mathcal{P}$** , alors d est parallèle à $\mathcal{P}$. Pour démontrer qu'une droite est parallèle à un plan, on cherche donc **une** droite du plan qui lui soit parallèle — une seule suffit.

3 Sections planes

CONSTRUIRE LA SECTION D'UN SOLIDE PAR UN PLAN

- 1 **Repérer les points déjà donnés** sur les faces, et les relier deux à deux **quand ils sont sur une même face** — jamais autrement : un segment de la section vit dans une face.
- 2 **Utiliser le parallélisme des faces** : deux faces parallèles coupées par un même plan donnent deux segments **parallèles**. C'est ce qui permet de compléter la figure sans nouveau point.
- 3 **Prolonger les arêtes** si nécessaire pour obtenir un point d'intersection supplémentaire, puis revenir dans le solide.
- 4 **Nommer le polygone obtenu** et justifier sa nature.
la section d'un cube par un plan peut être un triangle, un quadrilatère, jusqu'à un hexagone — le nombre de côtés ne dépasse jamais le nombre de faces coupées.

Deux sections reviennent constamment. Un **cône ou une pyramide coupés par un plan parallèle à la base** donnent une figure **semblable** à la base : si le rapport de réduction est k , les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 et les volumes par k^3 . Une **sphère coupée par un plan** donne toujours un **cercle**, dont le rayon diminue à mesure que le plan s'éloigne du centre — c'est pourquoi un ballon, quelle que soit la façon dont on le tranche, ne donne jamais autre chose qu'un disque.

4 Se repérer dans l'espace

DÉFINITION

Un **repère de l'espace** est la donnée d'une origine et de trois axes non coplanaires. Tout point s'y écrit alors $M(x; y; z)$: deux coordonnées situent le point dans le plan horizontal, la troisième donne sa hauteur. Dans un repère **orthonormé**, la distance entre deux points s'obtient par un Pythagore appliqué deux fois, et le **milieu** se calcule coordonnée par coordonnée, exactement comme dans le plan.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

La **distance d'un point à un plan** est la plus courte de toutes les distances de ce point aux points du plan : c'est celle mesurée **perpendiculairement**. Lorsque le plan est l'un des plans de coordonnées, elle se lit sans aucun calcul — la distance de $M(x; y; z)$ au plan horizontal (Oxy) vaut $|z|$, puisque se déplacer dans ce plan ne change que x et y . C'est aussi la hauteur à employer dans un volume de pyramide : la hauteur d'une pyramide est la distance du sommet au plan de la base, jamais la longueur d'une arête latérale.

À VÉRIFIER

- Avant de conclure « parallèles », ai-je exhibé le **plan** contenant les deux droites ?
- Ai-je distingué **orthogonales** (angle droit) et **perpendiculaires** (en plus sécantes) ?
- Ai-je relié deux points d'une section seulement lorsqu'ils sont sur une **même face** ?
- Dans une réduction de rapport k : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$?
- Ai-je gardé π jusqu'au dernier calcul ?
- La hauteur employée est-elle bien la **distance au plan de base**, et non une arête ?

À RETENIR

- Tout ce qui **pointe** vaut un tiers : cône et pyramide.
- Sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, aire $= 4\pi r^2$ — cube d'un côté, carré de l'autre.
- Deux droites : coplanaires (sécantes ou parallèles), ou **non coplanaires**.
- Sans point commun **n'implique pas** parallèles — c'est faux dans l'espace.
- **Orthogonales** : angle droit · **perpendiculaires** : angle droit et sécantes.
- Deux plans sécants se coupent selon une **droite**.
- Réduction de rapport k : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.