CORRIGÉ

1re

Géométrie repérée — Vecteur normal, projeté et cercle

Corrigé détaillé
7 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Vecteurs normaux et équations de droites

1. a. Les coefficients de x et de y donnent un vecteur normal : $\vec{n}_1\,(3\,;-2)$.
2. b. On passe tout à gauche : $2x+y-1=0$, donc $\vec{n}_2\,(2\,;1)$ est normal à d_2.
3. c. La droite a une équation $3x+4y+c=0$, et A la vérifie :
   $c=-(3\times 2+4\times(-1))=-2$
4. d. d_1 est dirigée par $\vec{u}_1\,(2\,;3)$, qui est donc normal à la droite cherchée : $2x+3y+c=0$, et B la vérifie :
   $c=-(2\times(-1)+3\times 3)=-7$
5. La droite de c. a pour équation $3x+4y-2=0$; celle de d. a pour équation $2x+3y-7=0$.

2 Équations de cercles

1. a. $(x-(-2))^2+(y-1)^2=3^2$, soit $\mathcal{C}$: $(x+2)^2+(y-1)^2=9$.
2. b. Pour A, on remplace x par 1 et y par 1 : le résultat vaut 9, donc $A\in\mathcal{C}$.
   $(1+2)^2+(1-1)^2=9+0=9$
3. Pour B : le résultat vaut 8, et $8\neq 9$, donc $B\notin\mathcal{C}$.
   $(0+2)^2+(3-1)^2=4+4=8$
4. c. $\Omega B^2=8<9$, donc $\Omega B=2\sqrt{2}<3$: B est **à l'intérieur** du cercle, ce que confirme la figure.
5. d. $x-4$ et $y-(-5)$: centre $\Omega'(4\,;-5)$. Le second membre vaut $r^2=7$, donc le rayon est $\sqrt{7}$.

3 Projeté orthogonal et distance à une droite

1. a. Avec $a=2$ et $b=-1$: $\vec{u}\,(-b\,;a)$, soit $\vec{u}\,(1\,;2)$.
2. b. $\vec{u}$ est normal à Δ : $x+2y+c=0$, et M la vérifie :
   $c=-(7+2\times 0)=-7$
   donc Δ : $x+2y-7=0$.
3. c. H est sur d et sur Δ. De d : $y=2x+1$; dans Δ : $x+2(2x+1)-7=0$, soit $5x-5=0$, donc $x=1$ et $y=3$.
   Contrôle : $H(1\,;3)$ vérifie l'équation de d.
   $2\times 1-3+1=0$
4. d. $\overrightarrow{MH}\,(-6\,;3)$, donc :
   $MH=\sqrt{(-6)^2+3^2}=\sqrt{45}\approx 6{,}71$
5. Comme $45=9\times 5$, la distance de M à d vaut exactement $3\sqrt{5}$.

4 Vrai ou faux ? Justifie.

1. a. **Vrai.** $(2\,;-3)$ est normal à la droite, et $(-4\,;6)=-2\times(2\,;-3)$ lui est colinéaire et non nul.
2. b. **Vrai.** Les vecteurs normaux $(1\,;2)$ et $(2\,;-1)$ sont orthogonaux :
   $1\times 2+2\times(-1)=0$
3. c. **Faux.** Les équations s'écrivent $2x-y+1=0$ et $2x+y-3=0$; les vecteurs normaux $(2\,;-1)$ et $(2\,;1)$ ne sont pas orthogonaux :
   $2\times 2+(-1)\times 1=3$
4. d. **Faux.** $x^2+(y-1)^2=0$: une somme de deux carrés nulle impose $x=0$ et $y=1$. L'ensemble est le seul point $(0\,;1)$.
5. e. **Faux.** Le centre est $(1\,;-2)$ et le rayon $\sqrt{9}=3$.
6. f. **Vrai.** Le point $(3\,;0)$ est sur l'axe, et le vecteur $(0\,;-5)$ qui le relie à M est orthogonal au vecteur directeur $(1\,;0)$ de l'axe.

5 Repérer l'erreur

1. a. $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$: Léa a oublié de retrancher 16, et de même 1 pour y. En fait $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$ et $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$.
2. b. L'équation devient $(x-4)^2 - 16 + (y+1)^2 - 1 + 8 = 0$, d'où le second membre :
   $16 + 1 - 8 = 9$
   $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$ avec $9 > 0$: $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega(4\,;-1)$ et de rayon 3.
3. c. Sur l'axe des ordonnées, $x = 0$: $16 + (y+1)^2 = 9$, donc $(y+1)^2$ vaudrait :
   $9 - 16 = -7$
   un carré n'est jamais négatif : aucune solution.
4. Le cercle ne coupe pas l'axe des ordonnées : son centre est à la distance 4 de cet axe, plus que le rayon 3.

6 L'arroseur et l'allée

1. a. $\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$.
2. b. C'est le projeté orthogonal de Ω sur d. Avec $\vec{u}\,(-2\,;1)$, $H(x\,;y)$ vérifie $\overrightarrow{\Omega H} \cdot \vec{u} = -2(x-3) + (y-2) = 0$, soit $y = 2x - 4$.
3. Dans d : $x + 2(2x-4) - 17 = 0$, soit $5x = 25$, donc $x = 5$, et $y = 2 \times 5 - 4 = 6$. Contrôle : $H(5\,;6)$ est sur d.
   $5 + 2 \times 6 - 17 = 0$
4. c. On calcule la distance :
   $\Omega H = \sqrt{(5-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$
   $\Omega H < 5$: le point H de l'allée est dans la zone arrosée, donc l'eau atteint l'allée.
5. d. E : $7 + 2 \times 5 - 17 = 0$, donc $E \in d$; et $E \in \mathcal{C}$:
   $(7-3)^2 + (5-2)^2 = 16 + 9 = 25$
   de même, $F \in d$ car $3 + 14 - 17 = 0$, et $F \in \mathcal{C}$ car $0^2 + 5^2 = 25$.
6. e. La partie arrosée de l'allée est le segment $[EF]$, entre les deux points où d coupe le cercle :
   $EF = \sqrt{(3-7)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$
7. Le milieu de $[EF]$ est $\left(\frac{7+3}{2}\,;\frac{5+7}{2}\right) = (5\,;6)$: c'est H. Environ 4,47 m d'allée sont arrosés ($2\sqrt{5}$ m).

7 Les hauteurs d'un triangle

1. a. h_A passe par A et est perpendiculaire à (BC) : $\overrightarrow{BC}\,(-4\,;4)$ lui est normal, donc aussi $(-1\,;1)$: $-x + y + c = 0$, et A donne $2 + c = 0$. Ainsi h_A : $-x + y - 2 = 0$, soit $y = x + 2$.
2. b. $\overrightarrow{AB}\,(6\,;0)$ est normal à h_C : $6x + c = 0$. $C(0\,;4)$ la vérifie, donc $c = 0$ et h_C : $x = 0$.
3. c. Avec $x = 0$ dans $y = x + 2$, on obtient $y = 2$: $K(0\,;2)$.
4. d. $\overrightarrow{AC}\,(2\,;4)$ est normal à h_B : $2x + 4y + c = 0$; B la vérifie, donc $8 + c = 0$, $c = -8$. On teste K :
   $2 \times 0 + 4 \times 2 - 8 = 0$
5. K est sur les trois hauteurs : elles sont **concourantes** en K, l'orthocentre du triangle.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Vecteur normal lu, équation de droite par un point et un vecteur normal	2 pts	Lire a, b sur $y = mx + p$; confondre normal et directeur ; oublier c
Projeté orthogonal : système $H \in d$, $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$, résolu et contrôlé	2 pts	Utiliser $\vec{n}$ au lieu de $\vec{u}$; point de même abscisse
Équation d'un cercle : écrite, puis utilisée par substitution	2 pts	Signe du centre inversé ; r au lieu de r^2
Reconnaître un cercle : carrés complétés, signe de k, centre et rayon	2 pts	Oublier de retrancher $\frac{p^2}{4}$; « cercle » quand $k \leq 0$
Configuration : données traduites, conclusion rédigée en valeur exacte	2 pts	Conclure sur l'allure de la figure ; valeur approchée seule