COURS

1re

Géométrie repérée — Vecteur normal, projeté et cercle

Programme de spécialité mathématiques de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602917A

En seconde, une droite s'écrivait $ax + by + c = 0$ et se lisait par un vecteur directeur. En première, le produit scalaire ajoute un second regard, celui de l'orthogonalité : **dans un repère orthonormé, une droite est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, un cercle l'ensemble des points M tels que $\Omega M^2 = r^2$ — chaque condition géométrique devient une équation.** Le projeté orthogonal d'un point sur une droite s'obtient alors par un système.

1 Vecteur normal et équation de droite

Le plan est muni d'un repère **orthonormé**. Pour $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$, et $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $xx' + yy' = 0$ (fiche *Produit scalaire*). Rappel de seconde : la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est dirigée par $\vec{u}\,(-b\,;a)$.

DÉFINITION

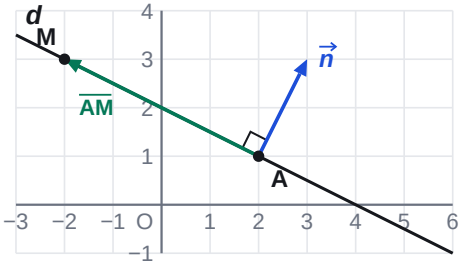
Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur **non nul** orthogonal à un vecteur directeur de d. Tout vecteur non nul qui lui est colinéaire est encore normal à d.

PROPRIÉTÉ

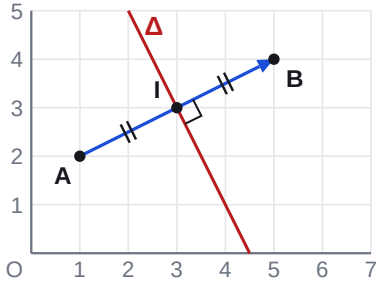
Propriété (démontrée). Soit A un point et $\vec{n}\,(a\,;b)$ un vecteur non nul. La droite d passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$; elle a une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Réciproquement, **le vecteur $\vec{n}\,(a\,;b)$ est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.** *Preuve.* M est sur d si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à un vecteur directeur de d, c'est-à-dire orthogonal à $\vec{n}$. Avec $A(x_A\,;y_A)$ et $M(x\,;y)$, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A)$, nul si et seulement si $ax + by + c = 0$, où $c = -ax_A - by_A$. Dans l'autre sens, $\vec{u}\,(-b\,;a)$ dirige la droite et $\vec{n}\cdot\vec{u} = -ab + ba = 0$.

$$M \in d \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff ax + by + c = 0$$

d : x + 2y − 4 = 0 passe par A(2 ; 1), vecteur normal (1 ; 2)



médiatrice Δ de [AB] : 2x + y − 9 = 0



À gauche, $\overrightarrow{AM}$ suit d et $\vec{n}$ lui est perpendiculaire ; à droite, la médiatrice de l'exemple.

ÉQUATION D'UNE DROITE DONNÉE PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

1. **Recopier les coordonnées de** $\vec{n}\,(a\,;b)$ devant x et y : l'équation s'écrit $ax + by + c = 0$.
2. **Trouver** c en écrivant que les coordonnées du point A vérifient l'équation.
3. **Contrôler** : A vérifie l'équation obtenue. Autre voie : développer $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ avec $M(x\,;y)$.

EXEMPLE

On donne $A(1\,;2)$ et $B(5\,;4)$. Déterminer une équation de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

1. Δ passe par le milieu I de $[AB]$ et est perpendiculaire à (AB) : $\overrightarrow{AB}$ lui est normal. Abscisse de I, puis ordonnée : $\frac{1+5}{2}=3$ et $\frac{2+4}{2}=3$
2. $\overrightarrow{AB}\,(5-1\,;4-2)$, soit $\overrightarrow{AB}\,(4\,;2)$: Δ a une équation $4x+2y+c=0$.
3. $I(3\,;3)$ est sur Δ, donc $4\times3+2\times3+c=0$:
   $c=-(4\times3+2\times3)=-18$
   on divise $4x+2y-18=0$ par 2 ; contrôle : $2\times3+3-9=0$.

$\underline{\Delta : 2x+y-9=0}$

RÈGLE

Deux droites sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont **orthogonaux**, **parallèles** si et seulement s'ils sont **colinéaires**. Ainsi $x+2y-4=0$ et $2x-y+1=0$ sont perpendiculaires : $1\times2+2\times(-1)=0$.

2 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

DÉFINITION

Soit d une droite et M un point. Le **projeté orthogonal** de M sur d est le point H de d tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à d ; si M est sur d, alors $H=M$. La longueur MH est la **distance du point M à la droite d**.

PROPRIÉTÉ

Propriété (démontrée). Le projeté H est **le point de d le plus proche de M** : pour tout point P de d, $MP\geq MH$, avec égalité seulement si $P=H$. *Preuve.* $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HP}$, et $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{HP}=0$ car $\overrightarrow{HP}$ dirige d ou est nul. En développant le carré scalaire, $MP^2=MH^2+HP^2\geq MH^2$, avec égalité si et seulement si $HP=0$.

CALCULER LES COORDONNÉES DU PROJETÉ ORTHOGONAL

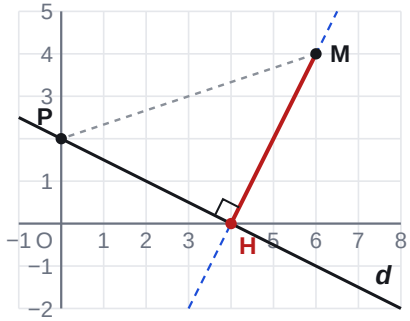
1. **Un vecteur directeur** de d : $ax+by+c=0$: $\vec{u}\,(-b\,;a)$.
2. **Deux conditions sur** $H(x\,;y)$: $H\in d$, soit $ax+by+c=0$; et $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=0$.
   la seconde équation est celle de la perpendiculaire à d passant par M : H est l'intersection des deux droites.
3. **Résoudre le système**, en général par substitution.
4. **Contrôler** : H vérifie l'équation de d, et $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=0$. La distance de M à d est MH.
   le point de d de même abscisse que M ne convient que si d est horizontale.

EXEMPLE

Soit d : $x+2y-4=0$ et $M(6\,;4)$. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur d, puis la distance de M à d.

1. $\vec{u}\,(-2\,;1)$ dirige d. Pour $H(x\,;y)$, $\overrightarrow{MH}\,(x-6\,;y-4)$ et $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=-2(x-6)+(y-4)=0$, soit $y=2x-8$.
2. On reporte dans l'équation de d : $x+2(2x-8)-4=0$, soit $5x-20=0$, donc $x=4$, puis :
   $y=2\times4-8=0$
   contrôle : $4+2\times0-4=0$, donc $H(4\,;0)$ est bien sur d.
3. $\overrightarrow{MH}\,(-2\,;-4)$, d'où la distance, qui vaut aussi $2\sqrt{5}$:
   $MH=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}\approx4{,}47$

$\underline{H(4\,;0)\text{, et la distance de } M \text{ à } d \text{ vaut } 2\sqrt{5}}$



M(6 ; 4) et d : x + 2y − 4 = 0

H est sur d, et (MH) est perpendiculaire à d :
H est sur la perpendiculaire à d issue de M.

H(4 ; 0) ; MH = √20 = 2√5 ≈ 4,47

Pour tout autre point P de d, le triangle MHP est rectangle en H. Avec P(0 ; 2) :
MP² = MH² + HP² = 20 + 20 = 40

MP = √40 > MH : H est le point de d le plus proche de M.

Le projeté H est au pied de la perpendiculaire à d issue de M ; tout autre point de d est plus loin de M.

PIÈGE

Pour la droite $y = 3x + 2$, annoncer le vecteur normal $\vec{n}\,(3\,;1)$. — on ne lit a et b que sur $ax + by + c = 0$. Ici $3x - y + 2 = 0$: $\vec{n}\,(3\,;-1)$.

Ce que ça coûte : toute droite perpendiculaire qu'on en déduit.

Le réflexe : tout passer à gauche, puis vérifier $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

PIÈGE

Avec $\vec{n}\,(2\,;5)$, écrire $-5x + 2y + c = 0$, par réflexe de seconde. — c'est la droite **dirigée** par $(2\,;5)$, perpendiculaire à celle qu'on cherche.

Ce que ça coûte : la question entière.

Le réflexe : normal : $(a\,;b)$ tel quel ; directeur : $(-b\,;a)$.

PIÈGE

À la deuxième étape, écrire $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n} = 0$ avec le vecteur normal. — c'est l'équation de la parallèle à d passant par M : le système n'a pas de solution.

Ce que ça coûte : le projeté et la distance.

Le réflexe : $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, donc orthogonal à $\vec{u}$: utiliser $\vec{u}$.

3 Équation d'un cercle

PROPRIÉTÉ

Propriété (démontrée). Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$: un point $M(x\,;y)$ est sur $\mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées la vérifient. *Preuve.* $M \in \mathcal{C} \iff \Omega M = r \iff \Omega M^2 = r^2$, car ΩM et r sont positifs ; et, le repère étant orthonormé, $\Omega M^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$. (Descartes, XVII^{e} siècle.)

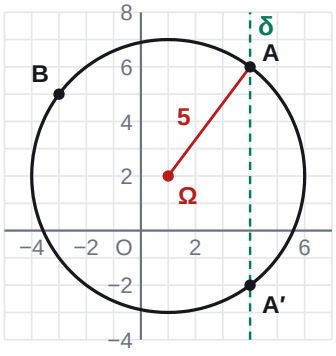
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

EXEMPLE

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $\Omega(1\,;2)$ et passe par $A(4\,;6)$. Écrire son équation, puis déterminer ses points d'intersection avec la droite δ d'équation $x = 4$.

1. Le rayon est ΩA :
   $r^2 = \Omega A^2 = (4-1)^2 + (6-2)^2 = 9 + 16 = 25$
2. D'où $\mathcal{C}$: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, de rayon 5. Sur δ, on remplace x par 4 : $9 + (y-2)^2 = 25$, donc :
   $(y-2)^2 = 25 - 9 = 16$
3. $y - 2 = 4$ ou $y - 2 = -4$, soit $y = 6$ ou $y = -2$.

$\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$; δ le coupe en $A(4\,;6)$ et $A'(4\,;-2)$

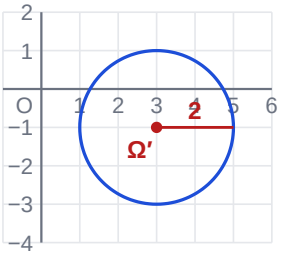


centre Ω(1 ; 2), rayon 5 :
(x − 1)² + (y − 2)² = 25

B(−3 ; 5) : 16 + 9 = 25,
donc B est sur le cercle.

δ : x = 4 coupe le cercle en A(4 ; 6) et A′(4 ; −2).

x² + y² − 6x + 2y + 6 = 0
⟺ (x − 3)² + (y + 1)² = 4



À gauche, l'exemple ci-dessus ; à droite, le cercle reconnu dans l'exemple suivant.

RECONNAÎTRE UNE ÉQUATION DE CERCLE

1. **Se ramener à** $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$, en divisant si besoin par le coefficient commun de x^2 et de y^2.
2. **Faire apparaître deux carrés** : $x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}$, de même en y, puis isoler : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$.
   c'est la forme canonique du second degré, appliquée à chaque variable.
3. **Conclure selon le signe de k** : si $k > 0$, cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{k}$; si $k = 0$, le seul point Ω ; si $k < 0$, aucun point.

EXEMPLE

Reconnaître l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+2y+6=0$.

1. $x^2-6x=(x-3)^2-9$ et $y^2+2y=(y+1)^2-1$.
2. L'équation devient $(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0$, d'où le second membre : $k=9+1-6=4$
3. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$, avec $4>0$: le rayon vaut $\sqrt{4}=2$.

$\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega'(3\,;-1)$ et de rayon 2

PIÈGE

Lire le centre de $(x+3)^2+(y-1)^2=16$ comme le point $(3\,;1)$. — $x+3=x-(-3)$, donc $a=-3$: le centre est $(-3\,;1)$.

Ce que ça coûte : le centre et la figure.

Le réflexe : au centre, chaque parenthèse doit s'annuler.

PIÈGE

Donner le rayon 16 pour le cercle $(x+3)^2+(y-1)^2=16$. — le second membre est r^2 : le rayon vaut $\sqrt{16}=4$.

Ce que ça coûte : le rayon et ce qui en dépend.

Le réflexe : un rayon, c'est la racine du second membre.

PIÈGE

Conclure « c'est un cercle » pour $x^2+y^2+4x+5=0$ sans finir le calcul. — $(x+2)^2+y^2=-1$ est impossible : l'ensemble est **vide**.

Ce que ça coûte : la conclusion entière.

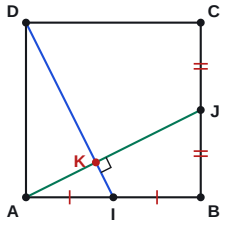
Le réflexe : finir les carrés, puis regarder le signe de k.

4 Étudier une configuration avec un repère

TRADUIRE UNE FIGURE EN CALCULS

1. **Choisir un repère orthonormé** : origine en un sommet, axes le long de deux côtés perpendiculaires.

   piège : pour un rectangle $ABCD$ non carré, $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ n'est pas orthonormé, et $xx'+yy'$ n'y donne pas le produit scalaire.
2. **Traduire chaque donnée** : milieu → coordonnées moyennes ; perpendiculaire → vecteur normal ou produit scalaire nul ; distance → $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$; cercle → équation.
3. **Calculer**, puis **conclure sur la figure** par une phrase.



$ABCD$ carré de côté 2, I et J milieux de $[AB]$ et $[BC]$.

EXEMPLE

$ABCD$ est un carré de côté 2, I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. Démontrer que (DI) et (AJ) sont perpendiculaires, puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection K.

1. Repère orthonormé d'origine A, d'axes (AB) et (AD), d'unité la moitié du côté : $D(0\,;2)$, $I(1\,;0)$, $J(2\,;1)$, d'où $\overrightarrow{DI}\,(1\,;-2)$ et $\overrightarrow{AJ}\,(2\,;1)$, de produit scalaire nul : $1\times 2+(-2)\times 1=0$
2. (AJ) : $x-2y=0$ (vecteur normal $\overrightarrow{DI}$) et (DI) : $2x+y-2=0$ (vecteur normal $\overrightarrow{AJ}$). Avec $x=2y$: $5y-2=0$, d'où $y=\frac{2}{5}$, $x=\frac{4}{5}$; K est le projeté de D sur (AJ).

$(DI)\perp(AJ)$, et $K\left(\frac{4}{5}\,;\frac{2}{5}\right)$

À VÉRIFIER

- Ai-je écrit l'équation sous la forme $ax+by+c=0$ **avant** de lire un vecteur normal ?
- Pour un projeté, ai-je écrit $H\in d$ **et** $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=0$, puis contrôlé ?
- Pour un cercle, ai-je discuté le **signe de** k et pris $r=\sqrt{k}$?

À RETENIR

- Droite $ax+by+c=0$: vecteur **normal** $\vec{n}\,(a\,;b)$, vecteur **directeur** $\vec{u}\,(-b\,;a)$.
- Par A, de vecteur normal $(a\,;b)$: $ax+by+c=0$, c calculé avec A.
- Droites **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Projeté H de M sur d : $H\in d$ et $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=0$; MH est la distance de M à d, la plus courte.
- Cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon r : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
- Reconnaître un cercle : compléter les carrés, puis le **signe de** k ; rayon $\sqrt{k}$.