CORRIGÉ

# Conditionnement — Probabilité conditionnelle, arbres, indépendance

1re
Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

## 1 Compléter et lire un arbre pondéré

1. a. Compléments à 1 à chaque nœud :
$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
puis $P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
2. b. Produit le long du chemin $A$ puis $B$ ; de même, $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$.
$P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$
3. c. $A$ et $\overline{A}$ forment une partition ; formule des probabilités totales :
$P(B) = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$
4. d. $P(B) \neq 0$ ; par définition :
$P_B(A) = \frac{0{,}18}{0{,}32} = 0{,}5625$
5. Conclusion : $P(B) = 0{,}32$ et $P_B(A) = 0{,}5625$, différent de $P_A(B) = 0{,}6$ : on ne peut pas échanger l'indice et l'évènement.

## 2 Traduire en notation

1. a. « parmi les femmes » : la population de référence est $F$, donc $P_F(T) = 0{,}4$. b. « parmi les joueurs de tennis » : $P_T(F) = 0{,}4$. Même pourcentage, autre population. c. « femmes **et** joueuses », rapporté à tous les membres : $P(F \cap T) = 0{,}12$.
2. d. Formule du produit $P(F \cap T) = P(F) \times P_F(T)$, donc :
$P(F) = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$
3. De même, avec $P(F \cap T) = P(T) \times P_T(F)$ :
$P(T) = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$
4. Conclusion : 30 % des membres sont des femmes, et 30 % jouent au tennis.

## 3 Tableau croisé et indépendance

1. a. $V$ compte $120 + 80 = 200$ clients et $S$ en compte $120 + 180 = 300$ ; tirage équiprobable, donc $P(S) = \dfrac{300}{500} = 0{,}6$ et :
$P(V) = \frac{200}{500} = 0{,}4$
2. La case commune :
$P(V \cap S) = \frac{120}{500} = 0{,}24$
3. b. Parmi les 200 clients qui ont l'option ; et, parmi les 300 satisfaits, $P_S(V) = \dfrac{120}{300} = 0{,}4$.
$P_V(S) = \frac{120}{200} = 0{,}6$
4. c. Le produit est égal à $P(V \cap S)$ ; et, seconde façon, $P_V(S) = 0{,}6 = P(S)$. $V$ et $S$ sont **indépendants**.
$P(V) \times P(S) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$
5. d. Conclusion : avoir l'option vidéo ne change pas la probabilité d'être satisfait — 60 % de satisfaits parmi les clients qui l'ont, comme parmi l'ensemble des clients.

## 4 Trois ateliers

1. a. Premier niveau : $P(A_1) = 0{,}5$, $P(A_2) = 0{,}3$, $P(A_3) = 0{,}2$. Second niveau, sachant chaque atelier : $P_{A_1}(D) = 0{,}02$, $P_{A_2}(D) = 0{,}03$, $P_{A_3}(D) = 0{,}05$, et vers $\overline{D}$ les compléments $0{,}98$, $0{,}97$, $0{,}95$.
   $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$
2. b. Chaque pièce vient d'un atelier et d'un seul : les trois évènements sont non vides, incompatibles deux à deux, et leur réunion est l'univers. C'est une partition.
3. Probabilités totales, un chemin par atelier :
   $P(D) = 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}01 = 0{,}029$
4. c. On cherche $P_D(A_3)$, dans le sens inverse de l'arbre : retour à la définition, avec $P(A_3 \cap D) = 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01$.
   $P_D(A_3) = \frac{0{,}01}{0{,}029} \approx 0{,}345$
5. Conclusion : une pièce défectueuse vient de l'atelier $A_3$ avec une probabilité d'environ $0{,}345$, alors que cet atelier ne fournit que 20 % de la production.

---

## 5 Vrai ou faux ? Justifier.

1. a. **Faux.** $A \cap B = \varnothing$ donne $P(A \cap B) = 0$, alors que $P(A) \times P(B) > 0$ : l'égalité qui définit l'indépendance est fausse.
2. b. **Vrai.** $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles, de réunion $A$ : $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$ ; on divise par $P(A)$.
3. c. **Faux.** Contre-exemple : l'arbre de l'exercice 1, où $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$. Les deux nombres concernent deux populations différentes.
   $0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$
4. d. **Vrai.** $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)\,P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A)\,P(\overline{B})$.
5. e. **Faux.** Contre-exemple : dans l'exemple du tableau croisé du cours, $P_M(S) = 0{,}375$ et $P_S(M) = 0{,}5625$ ; même numérateur, dénominateurs différents.
6. f. **Vrai.** $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, et ce nombre est égal au produit $P(A) \times P(B)$.
   $0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}7 = 0{,}2 = 0{,}5 \times 0{,}4$

---

## 6 Deux dés à quatre faces

1. a. Les deux dés sont distincts et rien ne relie physiquement leurs résultats : on pose l'indépendance des deux épreuves. Dans le tableau $4 \times 4$ (ligne : dé rouge ; colonne : dé vert), les sommes sont, ligne par ligne, 2, 3, 4, 5 ; 3, 4, 5, 6 ; 4, 5, 6, 7 ; 5, 6, 7, 8, et chaque case a pour probabilité :
   $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
2. b. La somme 5 occupe quatre cases : $(1\,;4)$, $(2\,;3)$, $(3\,;2)$ et $(4\,;1)$.
   $P(F) = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$
3. c. $P(E) = \dfrac{1}{2}$ (rouge 2 ou 4), et $E \cap F$ ne contient que $(2\,;3)$ et $(4\,;1)$, donc $P(E \cap F) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$. Le produit :
   $P(E) \times P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
4. Conclusion : $P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$, donc $E$ et $F$ sont indépendants — ce que l'intuition ne laissait pas prévoir.

---

## 7 Répondre au hasard à un QCM

1. a. Chaque question est une épreuve à deux issues : succès $S$ « la réponse est juste », ou échec. Les réponses sont données au hasard, indépendamment, avec la même probabilité de succès $p = \dfrac{1}{3}$ ; l'échec a pour probabilité $\dfrac{2}{3}$.
2. b. Quatre épreuves à deux issues : $2^4 = 16$ chemins. « Aucune bonne réponse » : un seul chemin, quatre échecs.
   $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$
3. c. Un chemin à 3 succès et 1 échec a pour probabilité $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{81}$ ; l'échec peut porter sur la 1re, la 2e, la 3e ou la 4e question : 4 chemins.
   $4 \times \frac{2}{81} = \frac{8}{81}$
4. d. Lou n'a compté qu'un chemin, celui où l'erreur est à la dernière question. Il y en a quatre : son résultat est 4 fois trop petit.
5. e. « Au moins 3 » : exactement 3, ou exactement 4 (un seul chemin, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$) ; ces évènements sont incompatibles.
   $\frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$
6. Conclusion : en répondant au hasard, l'élève a une chance sur neuf d'avoir au moins 3 bonnes réponses, et une probabilité $\dfrac{16}{81} \approx 0{,}198$ de n'en avoir aucune.

---

## 8 Une marche aléatoire

1. a. Chaque étape est une épreuve de Bernoulli de paramètre $0{,}6$ (succès $D$ : « vers la droite ») ; les 4 étapes sont identiques et indépendantes. Avec $k$ pas à droite et $4-k$ à gauche, la position est $k-(4-k)=2k-4$ : pour $k=0$ à 4, les positions possibles sont $-4$, $-2$, $0$, $2$ et $4$.
2. b. Retour à l'origine : $2k-4=0$, donc $k=2$. Six chemins : $DDGG$, $DGDG$, $DGGD$, $GDDG$, $GDGD$, $GGDD$, chacun de probabilité $0{,}6^2\times 0{,}4^2=0{,}0576$.
   $6\times 0{,}6^2\times 0{,}4^2=6\times 0{,}0576=0{,}3456$
3. c. Position 2 ou plus : $k=3$ (4 chemins, le pas à gauche à l'une des 4 étapes) ou $k=4$ (1 chemin).
   $4\times 0{,}6^3\times 0{,}4=4\times 0{,}216\times 0{,}4=0{,}3456$
4. Ces deux évènements sont incompatibles ; on ajoute $0{,}6^4=0{,}1296$ :
   $0{,}3456+0{,}6^4=0{,}3456+0{,}1296=0{,}4752$
5. Conclusion : le pion est revenu à l'origine avec la probabilité $0{,}3456$, et se trouve en position 2 ou au-delà avec la probabilité $0{,}4752$.

---

**Corrige-toi toi-même.** Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

| Ce qui est évalué | Points | Ce qui fait perdre le point |
|---|---|---|
| Placer chaque donnée sur la bonne branche, compléments à 1 compris | 4 pts | Une probabilité conditionnelle écrite comme une intersection ; un nœud dont les branches ne font pas 1 |
| Calculer une intersection par le produit le long du chemin | 3 pts | $P(A\cap B)$ confondue avec $P_A(B)$ |
| Appliquer les probabilités totales en nommant la partition | 4 pts | Un chemin oublié ; la partition ni nommée ni justifiée |
| Inverser le conditionnement par la définition | 3 pts | $P_B(A)$ pris égal à $P_A(B)$ |
| Justifier l'indépendance par le calcul, et la répétition de Bernoulli par « identiques et indépendantes » | 3 pts | Une indépendance « évidente » ; incompatibles pris pour indépendants ; un seul chemin compté |
| Conclure par une phrase en contexte, arrondi annoncé | 3 pts | Un résultat brut sans interprétation ; un arrondi fait en cours de calcul |