COURS

1re

Conditionnement — Probabilité conditionnelle, arbres, indépendance

Programme de spécialité mathématiques de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602917A

Parmi les personnes dont le test est positif, la proportion de malades n'est pas celle de la population entière : savoir qu'un évènement est réalisé change les probabilités. C'est la **probabilité conditionnelle** $P_A(B)$. Le chapitre tient en une règle : **sur un arbre pondéré, on multiplie le long d'un chemin, et l'on additionne les chemins qui mènent au même évènement.**

1 Probabilité conditionnelle

DÉFINITION

Soit A un évènement de probabilité **non nulle**. La **probabilité de B sachant A** est $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$: l'univers se réduit à A, et l'on mesure la part de B dans A. Si $P(A) = 0$, $P_A(B)$ n'est pas défini.

PROPRIÉTÉ

Pour $P(A) \neq 0$. **Formule du produit** : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. **Contraire** : $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$. *Démonstration* : $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles, de réunion A, donc $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$; on divise par $P(A)$.

LIRE UNE PROBABILITÉ DANS UN TABLEAU CROISÉ

1. **Repérer la population de référence** : tout l'effectif pour $P(A \cap B)$, la ligne ou la colonne de A pour $P_A(B)$ (« sachant », « parmi »).
2. **Diviser l'effectif de la case commune** à A et B par celui de cette population.

EXEMPLE

On tire au hasard un élève parmi les 400 élèves de première d'un lycée. M : « il suit la spécialité mathématiques » ; S : « il pratique un sport en club ». Calculer $P(M \cap S)$, $P_M(S)$ et $P_S(M)$ avec le tableau croisé ci-dessous.

1. Tirage équiprobable : chaque probabilité est un quotient d'effectifs, de numérateur 90, la case commune ; seul le dénominateur change (figure). Par exemple, parmi les 240 élèves M :
   $P_M(S) = \frac{90}{240} = 0{,}375$

$P(M \cap S) = 0{,}225$, $P_M(S) = 0{,}375$, $P_S(M) = 0{,}5625$.

P(M ∩ S) = 90 / 400 = 0,225

	S	$\overline{S}$	Total
M	**90**	150	240
$\overline{M}$	70	90	160
Total	160	240	**400**

$P_M(S)$ = 90 / 240 = 0,375

	S	$\overline{S}$	Total
M	**90**	150	**240**
$\overline{M}$	70	90	160
Total	160	240	400

$P_S(M)$ = 90 / 160 = 0,5625

	S	$\overline{S}$	Total
M	**90**	150	240
$\overline{M}$	70	90	160
Total	**160**	240	400

La même case, 90, et trois probabilités : l'évènement placé en indice choisit le dénominateur.

PIÈGE

Confondre $P_M(S)$ et $P_S(M)$: écrire « 37,5 % des sportifs suivent la spécialité ». — 37,5 % est la part des sportifs **parmi les élèves de spécialité** ; parmi les sportifs, 56,25 % suivent la spécialité. L'indice est l'évènement que l'on **sait** réalisé.

Ce que ça coûte : la réponse, et la conclusion qui en dépend.

Le réflexe : traduire « sachant A » par « parmi les A ».

2 Arbres pondérés et probabilités totales

DÉFINITION

Des évènements non vides A_1, …, A_n forment une **partition** de Ω, ou **système complet d'évènements**, s'ils sont **incompatibles deux à deux** et de **réunion** Ω : chaque issue en réalise un et un seul. Exemple : A et $\overline{A}$, si A n'est ni impossible ni certain.

PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales. Si A_1, ..., A_n forment une partition de Ω, de probabilités non nulles, alors pour tout évènement B, $P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$, où chaque terme vaut $P(A_i) \times P_{A_i}(B)$. *Démonstration* : les $A_i \cap B$ sont incompatibles deux à deux, de réunion B ; leurs probabilités s'ajoutent. Avec A, $\overline{A}$: $P(B) = P(A)\,P_A(B) + P(\overline{A})\,P_{\overline{A}}(B)$.

$$P(B) = P(A_1)\,P_{A_1}(B) + P(A_2)\,P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)\,P_{A_n}(B)$$

LES RÈGLES DE L'ARBRE PONDÉRÉ

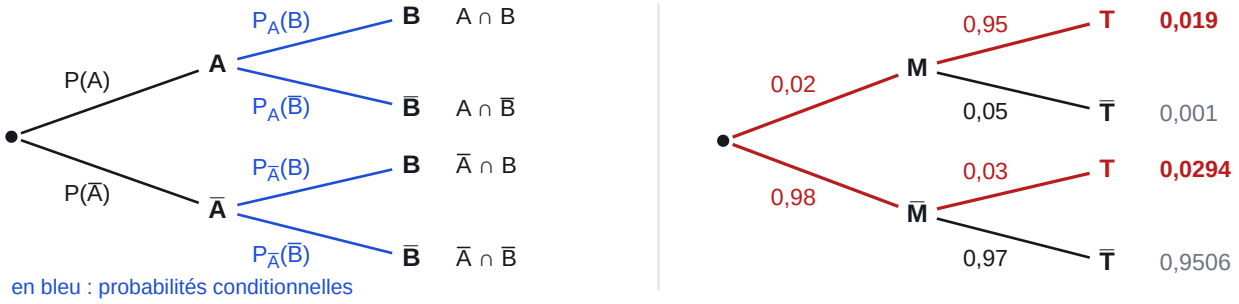
1. **Placer les données** : une partition au premier niveau ; au second, ce qui se passe **sachant** chaque branche : de A vers B, $P_A(B)$ et non $P(B)$. Les branches d'un nœud ont pour somme 1.
2. **Un chemin est un produit** : c'est une intersection, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
3. **Un évènement est une somme** : on additionne les chemins qui y mènent (probabilités totales).
4. **Pour inverser le conditionnement**, revenir à la définition : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

EXEMPLE

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test est positif chez 95 % des malades, mais aussi chez 3 % des personnes saines. On choisit une personne au hasard ; M : « elle est malade », T : « son test est positif ». Calculer $P(T)$, puis $P_T(M)$.

1. Premier niveau M, $\overline{M}$: $0{,}02$ et $0{,}98$. Second niveau : $P_M(T) = 0{,}95$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}03$. Probabilités totales sur les deux chemins qui mènent à T :
   $P(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}019 + 0{,}0294 = 0{,}0484$
2. Puis la définition, dans l'autre sens, arrondie au millième :
   $P_T(M) = \frac{0{,}019}{0{,}0484} \approx 0{,}393$

$P(T) = 0{,}0484$ et $P_T(M) \approx 0{,}393$: moins de 40 % des tests positifs signalent un malade. Rien à voir avec $P_M(T) = 0{,}95$: les faux positifs l'emportent.



À gauche, l'arbre général : chaque chemin aboutit à une intersection. À droite, le dépistage : les deux chemins qui mènent à T sont en rouge ; les quatre feuilles ont pour somme 1.

PIÈGE

Lire « positif chez 3 % des personnes saines » comme $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}03$. — « chez les personnes saines » fixe la population : c'est la branche $P_{\overline{M}}(T)$. Le chemin vaut $0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0294$.

Ce que ça coûte : l'arbre entier, et chaque question qui en dépend.

Le réflexe : le mot qui restreint la population (« parmi », « chez », « si ») désigne l'indice.

3 Indépendance de deux évènements

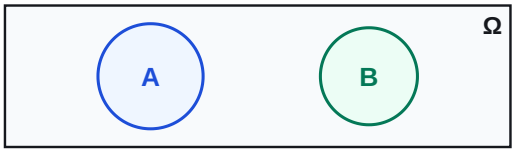
DÉFINITION

Deux évènements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Cette définition est symétrique en A et B.

PROPRIÉTÉ

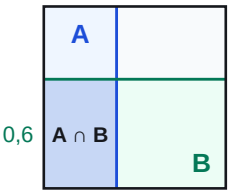
1. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants **si et seulement si** $P_A(B) = P(B)$. *Démonstration* : comme $P(A) \neq 0$, l'égalité $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ équivaut à $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. **2.** Si A et B sont indépendants, $\overline{A}$ et B le sont aussi (de même pour A et $\overline{B}$). *Démonstration* : $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ partagent B en deux, d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)\,P(B) = \big(1 - P(A)\big)P(B) = P(\overline{A})\,P(B)$.

incompatibles



A ∩ B = ∅, donc P(A ∩ B) = 0
alors que P(A) × P(B) > 0 : pas indépendants

indépendants



aire de A ∩ B :
0,4 × 0,6 = 0,24
P(A ∩ B) = P(A) × P(B)

À droite, un point tiré au hasard dans le carré unité : A « il est dans la bande bleue », B « dans la bande verte ». L'aire commune est le produit des deux.

JUSTIFIER OU UTILISER L'INDÉPENDANCE

1. **La justifier** : calculer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$ séparément et comparer, ou comparer $P_A(B)$ et $P(B)$.
2. **L'utiliser**, quand l'énoncé l'affirme ou que le modèle la pose, comme pour deux dés lancés séparément : remplacer $P(A \cap B)$ par $P(A) \times P(B)$. Dans une situation réelle, l'indépendance fait partie du **modèle**.

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. A : « résultat pair » ; B : « résultat ≤ 2 » ; C : « résultat ≤ 3 ». A et B sont-ils indépendants ? A et C ?

1. $A \cap B = \{2\}$, donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$, égal au produit :
   $P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
2. $A \cap C = \{2\}$, donc $P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$, différent du produit :
   $P(A) \times P(C) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

A et B sont indépendants ; A et C ne le sont pas.

PIÈGE

« A et B sont incompatibles, donc indépendants : ils n'ont rien à voir. » — c'est l'inverse : si $A \cap B = \varnothing$ avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors $P(A \cap B) = 0 < P(A) \times P(B)$. Savoir que A est réalisé dit même que B ne l'est pas.

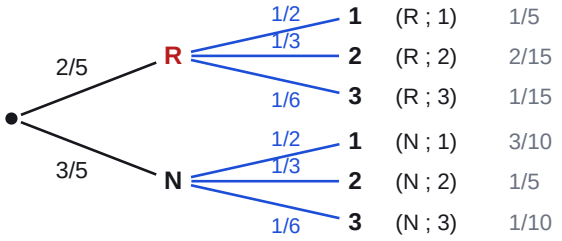
Ce que ça coûte : la question entière, et souvent la suivante.

Le réflexe : incompatibles se lit sur les issues ; indépendants se vérifie sur les probabilités.

4 Épreuves indépendantes et répétition de Bernoulli

DÉFINITION

Les probabilités de la seconde épreuve **ne dépendent pas** du résultat de la première. Une issue est un **couple** $(x\,;y)$, de probabilité le **produit** $P(x) \times P(y)$: c'est le modèle. Dans l'**arbre**, les branches du second niveau sont les mêmes sous chaque nœud ; dans le **tableau** à double entrée, chaque case porte le produit de sa ligne et de sa colonne. Des tirages **sans remise** ne sont pas indépendants.



mêmes branches bleues sous R et sous N

roue →

	1 (1/2)	2 (1/3)	3 (1/6)
R (2/5)	1/5	2/15	1/15
N (3/5)	3/10	1/5	1/10

chaque case : produit de sa ligne et de sa colonne
ex. : (2/5) × (1/2) = 1/5 ; total des six cases : 1

Une boule tirée dans une urne de 2 rouges et 3 noires, puis une roue à trois secteurs de probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$: arbre et tableau portent les mêmes six probabilités.

DÉFINITION

Une **épreuve de Bernoulli** a **deux issues**, **succès** S et **échec** $\overline{S}$; $p = P(S)$ est son **paramètre**. Sa répétition n fois, **identique et indépendante** ($n \leq 4$), donne un arbre à 2^n chemins. Par la règle du produit, un chemin à k succès et $n-k$ échecs a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, quel que soit l'ordre ; pour **exactement k succès**, on multiplie par le **nombre de chemins** à k succès, compté sur l'arbre. Suite en terminale : fiche « Probabilités — schéma de Bernoulli et loi binomiale ».

RÉPÉTER UNE ÉPREUVE DE BERNOULLI

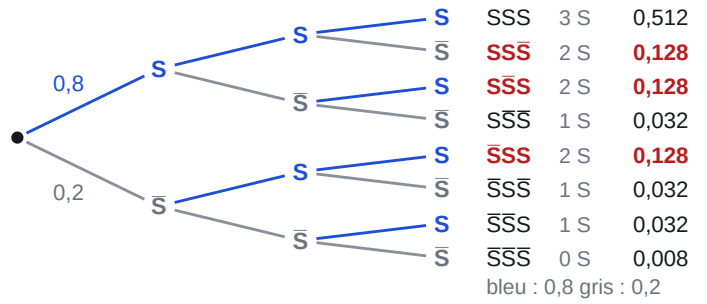
1. **Nommer le succès**, donner p, justifier « **identiques et indépendantes** » (tirages avec remise…).
2. **Lister sur l'arbre les chemins** qui réalisent l'évènement, multiplier le long de chacun, puis additionner.
3. Pour « au moins un succès », passer par le **contraire** : « aucun succès » n'a qu'un chemin, de probabilité $(1-p)^n$.

EXEMPLE

Une joueuse réussit chaque lancer franc avec la probabilité $0{,}8$, indépendamment des autres. Elle en tire trois : probabilité d'en réussir exactement deux ? au moins un ?

1. Bernoulli répétée, $p = 0{,}8$: trois chemins ont deux succès ($SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$, $\overline{S}SS$), chacun de probabilité $0{,}8^2 \times 0{,}2 = 0{,}128$:
   $3 \times 0{,}128 = 0{,}384$
2. « Au moins un succès » a pour contraire « trois échecs », un seul chemin :
   $1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$

Exactement deux réussites : $0{,}384$. Au moins une : $0{,}992$.



exactement 2 succès : 3 chemins rouges

3 × 0,8² × 0,2 = 3 × 0,128 = 0,384

au moins 1 succès : contraire de $\overline{S}\overline{S}\overline{S}$

1 − 0,2³ = 1 − 0,008 = 0,992

somme des huit feuilles :

0,512 + 3 × 0,128 + 3 × 0,032 + 0,008 = 1

Huit chemins ; les trois chemins à deux succès, en rouge, valent chacun $0{,}128$.

PIÈGE

Calculer « exactement deux succès » avec un seul chemin : $0{,}8^2 \times 0{,}2 = 0{,}128$. — c'est la probabilité **d'un** ordre précis ; trois chemins réalisent l'évènement.

Ce que ça coûte : un résultat divisé par 3, sans alerte.

Le réflexe : lister les chemins retenus avant de calculer.

PIÈGE

Poser le même p sur toutes les branches pour des tirages sans remise. — la composition change à chaque tirage : ni identiques, ni indépendantes.

Ce que ça coûte : tous les résultats de l'exercice.

Le réflexe : sinon, arbre à probabilités conditionnelles (partie 2).

Simuler : la méthode de Monte-Carlo. On tire x, puis indépendamment y, au hasard dans $[0\,;1]$: sur un grand nombre de tirages, la fréquence des points $M(x\,;y)$ tombés dans une région du carré unité se rapproche de son aire. Le quart de disque $x^2+y^2 \leq 1$ a pour aire $\frac{\pi}{4}$: quatre fois la fréquence estime π. Avec $y \leq x^2$, on estime l'aire sous la parabole ; en Python, random() fournit les tirages.

À VÉRIFIER

- $P(A) \neq 0$ avant d'écrire $P_A(B)$?
- Population de référence repérée pour l'indice ?
- Chaque nœud, et toutes les feuilles, font 1 ?
- Produit le long d'un chemin, somme des chemins ?
- Indépendance vérifiée par le calcul ?
- « Identiques et indépendantes » justifié, chemins tous comptés ?

À RETENIR

- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ si $P(A) \neq 0$: la part de B **parmi** les issues de A.
- Sur un arbre : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, on **multiplie** le long d'un chemin, on **additionne** les chemins.
- Probabilités totales : $P(B) = P(A)\,P_A(B) + P(\overline{A})\,P_{\overline{A}}(B)$.
- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; incompatibles : $A \cap B = \varnothing$. Ce n'est pas la même chose.
- Épreuves indépendantes : $P\big((x\,;y)\big) = P(x) \times P(y)$. Bernoulli, $n \leq 4$: un chemin à k succès vaut $p^k(1-p)^{n-k}$.