

Probabilités — schéma de Bernoulli et loi binomiale

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Reconnaître un schéma de Bernoulli, et justifier.

- ① a. Deux issues, même probabilité à chaque lancer, lancers sans influence mutuelle.
 $1 - 0.5 = 0.5$
schéma de Bernoulli : $\mathcal{B}(10; 0,5)$.
- ② b. Sans remise, la composition du jeu change à chaque tirage.
 $32 - 1 = 31$
les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes : ce n'est pas un schéma de Bernoulli.
- ③ c. La population d'une ville est très grande devant 50 : le prélèvement s'assimile à un tirage avec remise.
schéma de Bernoulli accepté, avec cette justification explicite — c'est elle qui est notée.

2 Lire et utiliser le triangle de Pascal.

- ① a. Ligne 5 du triangle : 1, 5, 10, 10, 5, 1.
 $4 + 6 = 10$
 $\binom{5}{2} = 10, \binom{5}{3} = 10, \binom{4}{0} = 1$.
- ② b. Ils sont égaux, et c'est la symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
 $5 - 2 = 3$
choisir les 2 épreuves qui réussissent revient à choisir les 3 qui échouent.

3 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,5)$.

- ① a. Le coefficient se lit sur la ligne 4 : $\binom{4}{2} = 6$, et chaque chemin vaut $0,5^4$.
 $0.5^4 = 0.0625$
- ② On multiplie.
 $6 \times 0.0625 = 0.375$
- ③ b. Un seul chemin sans succès.
 $1 \times 0.0625 = 0.0625$
- ④ On passe au contraire.
 $1 - 0.0625 = 0.9375$
- ⑤ c. L'espérance vaut np .
 $4 \times 0.5 = 2$
deux succès en moyenne, ce qui est bien ce qu'on attend d'une pièce équilibrée.

4 Un joueur de basket réussit 80 % de ses lancers francs. Il en tente 6.

- ① a. Succès = « lancer réussi », de probabilité 0,8 ; les six lancers sont identiques et supposés indépendants.
 $1 - 0.8 = 0.2$
 X suit $\mathcal{B}(6 ; 0,8)$.
- ② b. Six succès : le coefficient vaut 1 et l'exposant de 0,2 vaut 0.
 $0.8^6 = 0.262144$
environ 0,262.
- ③ c. En manquer un, c'est en réussir cinq : $\binom{6}{5} = 6$.
 $0.8^5 = 0.32768$
- ④ On multiplie par le coefficient et par 0,2.
 $6 \times 0.2 = 1.2$
- ⑤ Puis on termine.
 $1.2 \times 0.32768 = 0.393216$
environ 0,393 : manquer exactement un lancer est plus probable que les réussir tous.
-

5 Un QCM comporte 5 questions à 4 réponses possibles, une seule juste. Un élève répond au hasard.

- ① a. Chaque question est une épreuve à deux issues, de même probabilité de succès, et les réponses au hasard sont indépendantes.
 $1 \div 4 = 0.25$
 X suit $\mathcal{B}(5 ; 0,25)$.
- ② b. Aucun succès : le coefficient vaut 1, et il reste $0,75^5$.
 $1 - 0.25 = 0.75$
- ③ À la calculatrice.
 $0.75^5 = 0.2373046875$
environ 0,237, soit près d'une chance sur quatre de tout rater.
- ④ c. Espérance.
 $5 \times 0.25 = 1.25$
1,25 bonne réponse en moyenne — non entier, et c'est normal.
-

6 Contrôle qualité. Une machine produit 5 % de pièces hors norme. On prélève 10 pièces dans une production très nombreuse.

- ① a. Succès = « pièce hors norme », de probabilité 0,05 ; production très nombreuse, donc épreuves identiques et indépendantes.
 $1 - 0.05 = 0.95$
 X suit $\mathcal{B}(10 ; 0,05)$.
- ② b. Aucun succès : il reste $0,95^{10}$.
 $0.95^{10} = 0.5987369392383787$
- ③ On arrondit, puis on passe au contraire.
 $1 - 0.599 = 0.401$
environ 40 % des lots contiennent au moins une pièce hors norme.
- ④ c. « Au moins deux » a pour contraire « zéro ou une ».
 $0.599 + 0.315 = 0.914$
- ⑤ On soustrait à 1.
 $1 - 0.914 = 0.086$
environ 8,6 % des lots sont rejetés — un lot sur douze.
-

7 Vrai ou faux, en justifiant.

- ① a. Vrai : $\binom{n}{n} = 1$ et l'exposant de $(1 - p)$ vaut 0.
 $6 - 6 = 0$
 un seul chemin réalise n succès.
- ② b. Faux : l'espérance est une moyenne sur un grand nombre de répétitions.
 $2 + 3 = 5$
 une seule expérience peut donner 0 succès comme n succès.
- ③ c. Vrai, mais seulement parce que $p = 0,5$: les coefficients sont symétriques et les puissances identiques.
 $6 - 2 = 4$
 $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$, et $0,5^6$ multiplie les deux. Avec $p \neq 0,5$, l'égalité tomberait.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Succès nommé et probabilité donnée	2 pts	Le succès laissé implicite
Indépendance justifiée, pas supposée	4 pts	Un tirage sans remise traité comme binomial
Loi écrite avec ses deux paramètres	3 pts	La phrase « X suit $\mathcal{B}(n; p)$ » omise
Coefficient binomial présent	4 pts	La probabilité d'un seul chemin donnée pour réponse
Événement contraire pour « au moins un »	3 pts	Une somme de dix termes, et une erreur en route
Espérance interprétée	3 pts	0,4 pièce lu comme « presque une pièce »