

COURS

Probabilités — schéma de Bernoulli et loi binomiale

1^{re}

Programme de première générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Un contrôle qualité tire vingt pièces d'une chaîne où 2 % sont défectueuses. Combien en trouvera-t-on de mauvaises ? La réponse n'est pas un nombre mais une **loi** : une probabilité pour chaque résultat possible. La loi binomiale est l'outil qui la donne, et elle s'applique dès qu'on répète la même expérience un nombre fixé de fois, sans que les répétitions s'influencent.

1 Répéter la même épreuve

DÉFINITION

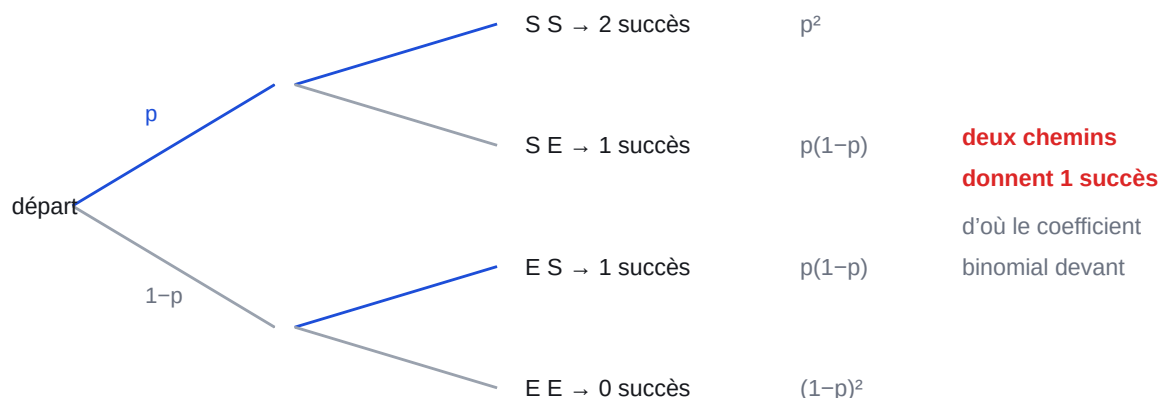
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience à **deux issues** seulement, qu'on convient d'appeler **succès** — de probabilité p — et **échec** — de probabilité $1 - p$. Le mot « succès » n'a rien d'élogieux : dans un contrôle qualité, le succès est la pièce défectueuse, puisque c'est elle qu'on compte. C'est l'énoncé qui décide, et le premier geste d'un exercice est de dire explicitement ce que l'on appelle succès.

$$P(\text{succès}) = p \quad ; \quad P(\text{échec}) = 1 - p$$

RÈGLE

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** — même probabilité de succès à chaque fois — et **indépendantes** — le résultat d'une épreuve ne change pas les suivantes. Ces deux conditions sont à vérifier, pas à supposer : un tirage **avec remise** les respecte, un tirage **sans remise** ne les respecte pas, puisque la composition change à chaque tirage. C'est la faute qui invalide le plus souvent un raisonnement juste par ailleurs.

chaque chemin a la même probabilité : c'est pourquoi on les compte



Deux répétitions : chaque chemin a sa probabilité, et plusieurs chemins donnent le même nombre de succès.

2 La loi binomiale

DÉFINITION

Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , la variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée $\mathcal{B}(n; p)$. Elle prend ses valeurs de 0 à n , et sa probabilité s'obtient en multipliant la probabilité d'un chemin par le **nombre de chemins** qui réalisent k succès.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

DÉFINITION

Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$, lu « k parmi n », est le nombre de chemins de l'arbre comportant exactement k succès parmi n épreuves. Il se lit sur le **triangle de Pascal**, où chaque nombre est la somme des deux qui le surmontent, ou se calcule directement à la calculatrice. Deux valeurs se retiennent : $\binom{n}{0} = 1$ — un seul chemin sans aucun succès — et $\binom{n}{1} = n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

chaque nombre est la somme des deux qui le surmontent



la ligne n donne les coefficients binomiaux de n épreuves, de $k = 0$ à $k = n$

Le triangle de Pascal : la ligne n donne tous les coefficients de n épreuves.

EXEMPLE

Un dé équilibré est lancé 5 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois un 6 ?

- ① Le succès est « obtenir un 6 », de probabilité $\frac{1}{6}$; les lancers sont identiques et indépendants, donc X suit $\mathcal{B}\left(5; \frac{1}{6}\right)$.
- ② On lit le coefficient sur la ligne 5 du triangle de Pascal, à la place $k = 2$.
 $4 + 6 = 10$
 $\binom{5}{2} = 10$.
- ③ On applique la formule : $10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$. Le premier facteur donne $\frac{1}{36}$, le second $\frac{125}{216}$.
 $6^2 = 36$
- ④ Le dénominateur total vaut 36×216 , et le numérateur 10×125 .
 $10 \times 125 = 1250$
- ⑤ On termine le quotient.
 $36 \times 216 = 7776$
 $\frac{1250}{7776} \approx 0,161$.

Environ 0,161, soit un peu plus de 16 %.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $P(X = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$ **sans le coefficient**. — ce produit est la probabilité d'un chemin précis — par exemple 6, 6, puis trois échecs dans cet ordre. Or l'énoncé ne demande pas un ordre : il y a dix façons de placer les deux 6 parmi cinq lancers, et la probabilité cherchée est dix fois plus grande. Oublier le coefficient divise la réponse par dix sans rien signaler.

Le réflexe : se demander si l'ordre est imposé. Si l'énoncé dit « exactement k fois » sans préciser quand, il y a un coefficient — toujours.

3 Espérance, et calcul à la calculatrice

PROPRIÉTÉ

L'**espérance** d'une variable suivant $\mathcal{B}(n; p)$ vaut $E(X) = np$. C'est le nombre moyen de succès qu'on obtiendrait en répétant l'expérience un très grand nombre de fois — et le résultat n'a aucune raison d'être entier : une espérance de 0,4 pièce défectueuse ne veut pas dire qu'on en trouve un peu moins d'une, mais qu'en moyenne, sur beaucoup de lots, il y en a 0,4 par lot.

$$E(X) = np$$

CALCULER UNE PROBABILITÉ BINOMIALE

- ① **Nommer le succès** et donner sa probabilité p , puis vérifier les deux conditions : épreuves identiques, épreuves indépendantes.
- ② **Écrire la loi** : « X suit la loi binomiale de paramètres $n = \dots$ et $p = \dots$ ». Cette phrase est notée en elle-même.
- ③ **Traduire la question** : « exactement k » se note $P(X = k)$; « au plus k » se note $P(X \leq k)$; « au moins un » se note $P(X \geq 1)$, et se calcule par l'événement contraire $1 - P(X = 0)$.
passer par le contraire évite d'additionner n termes, et c'est presque toujours ce qu'attend l'énoncé.
- ④ **Utiliser la calculatrice** : la fonction de densité binomiale donne $P(X = k)$, la fonction de répartition donne $P(X \leq k)$.
On arrondit à la fin seulement, et l'on n'oublie pas d'écrire la formule avant le résultat.

EXEMPLE

Une chaîne produit 2 % de pièces défectueuses. On prélève au hasard un lot de 20 pièces dans une production très nombreuse. Quelle est la probabilité qu'au moins une soit défectueuse, et combien en attend-on en moyenne ?

- ① Le succès est « la pièce est défectueuse », de probabilité 0,02. La production étant très nombreuse, le prélèvement s'assimile à un tirage avec remise : les épreuves sont identiques et indépendantes.
 $1 - 0.02 = 0.98$
- ② Donc X suit $\mathcal{B}(20; 0,02)$, et l'on passe par l'événement contraire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.
- ③ Or $P(X = 0) = 0,98^{20} \approx 0,668$, à la calculatrice.
le coefficient $\binom{20}{0}$ vaut 1 et $0,02^0$ vaut 1 : il ne reste que la puissance.
- ④ On soustrait à 1.
 $1 - 0.668 = 0.332$
- ⑤ L'espérance se calcule directement.
 $20 \times 0.02 = 0.4$
0,4 pièce défectueuse en moyenne par lot.

Environ 33 % des lots contiennent au moins une pièce défectueuse ; on en attend 0,4 par lot.

À VÉRIFIER

- Ai-je **nommé le succès** et donné sa probabilité ?
- Ai-je vérifié que les épreuves sont **identiques et indépendantes** ?
- Ai-je écrit la phrase « X suit la loi binomiale de paramètres... » ?
- Ai-je mis le **coefficient binomial** devant le produit des puissances ?
- Les deux exposants totalisent-ils bien n ?
- Pour « au moins un », ai-je utilisé l'**événement contraire** ?

À RETENIR

- Épreuve de Bernoulli : **deux** issues, succès de probabilité p .
- Schéma de Bernoulli : n épreuves **identiques et indépendantes**.
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ — les exposants totalisent n .
- Le coefficient compte les **chemins** : sans lui, on ne calcule qu'un seul ordre.
- $\binom{n}{0} = 1 \cdot \binom{n}{1} = n \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $E(X) = np$, et rien n'oblige ce nombre à être entier.
- « Au moins un » se calcule par $1 - P(X = 0)$.