CORRIGÉ

1re

Produit scalaire — Projection, cosinus et coordonnées

Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Calculer un produit scalaire par la méthode adaptée

1. a. Formule avec le cosinus :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 4\times\cos 60^\circ = 12\times 0{,}5 = 6$
2. b. Le cosinus de 135° est négatif : $\cos 135^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 5\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5\sqrt{2}\approx -7{,}07$
3. c. Formule en base orthonormée :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 4 + (-2)\times 5 = 12 - 10 = 2$
4. d. Même formule :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\times 6 + 2\times 3 = -6 + 6 = 0$
le produit est nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
5. e. Seules les normes sont connues : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
$\frac{1}{2}(49 - 9 - 25) = \frac{15}{2} = 7{,}5$
6. Bilan : 6 ; $-5\sqrt{2}$; 2 ; 0, vecteurs orthogonaux ; $7{,}5$.

2 Projeter dans un rectangle

1. a. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, car $(BC)\perp(AB)$. Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$.
$AB^2 = 6^2 = 36$
2. b. Le projeté de I sur (AB) est le milieu K de $[AB]$, et $\overrightarrow{AK}$ a le sens de $\overrightarrow{AB}$.
$AB\times AK = 6\times 3 = 18$
3. c. Le projeté de I sur (AD) est D, car $(DC)\perp(AD)$: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI} = AD^2$.
$4^2 = 16$
4. d. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$: les deux vecteurs sont de sens contraires, l'angle qu'ils forment mesure 180°. Léa a oublié le signe.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -AB^2 = -36$
5. Conclusion : 36, 18, 16 et -36.

3 Vrai ou faux ? Justifier.

1. a. **Faux.** En base orthonormée, $\vec{u}(1\,;0)$ et $\vec{v}(0\,;1)$ sont non nuls, et $1\times 0 + 0\times 1 = 0$: ils sont orthogonaux.
2. b. **Faux.** Il manque 2 $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Contre-exemple : $\vec{u}=\vec{v}$ de norme 1 donne $\|2\vec{u}\|^2 = 4$, alors que $1+1=2$. L'égalité n'est vraie que pour des vecteurs orthogonaux.
3. c. **Vrai.** Par bilinéarité, les réels sortent du produit : $2\times(-3) = -6$.
4. d. **Vrai.** Dans une base orthonormée, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\vec{u}\cdot\vec{i}$ et $\vec{u}\cdot\vec{j}$.
5. e. **Vrai.** Le produit vaut $AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, avec AB et AC positifs : il a le signe du cosinus, négatif seulement pour un angle obtus.
6. f. **Faux.** Il manque le cosinus : pour des vecteurs non nuls, l'égalité exige $\cos\widehat{BAC} = 1$, donc B et C sur une même demi-droite d'origine A. Contre-exemple : dans un triangle rectangle en A, le produit est nul alors que $AB\times AC\neq 0$.

4 Un triangle en repère orthonormé

1. a. $\overrightarrow{AB}(4\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;-2)$.
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times1+2\times(-2)=4-4=0$
2. Le produit est nul : $(AB)\perp(AC)$, donc **le triangle ABC est rectangle en A**.
3. b. $\overrightarrow{BA}(-4\,;-2)$ et $\overrightarrow{BC}(-3\,;-4)$.
   $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-4)\times(-3)+(-2)\times(-4)=12+8=20$
4. Les longueurs :
   $BA=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},\quad BC=\sqrt{9+16}=5$
5. c. Le cosinus, puis l'angle, calculatrice en degrés :
   $\cos\widehat{ABC}=\frac{20}{2\sqrt{5}\times5}=\frac{2}{\sqrt{5}}\approx0{,}894$
   donc $\widehat{ABC}\approx26{,}6^\circ$.
6. d. Le triangle est rectangle en A, avec $AC=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$: $\tan\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$, ce qui redonne $\widehat{ABC}\approx26{,}6^\circ$. Les deux méthodes concordent.

---

5 Al-Kashi : une longueur, puis des angles

1. a. Al-Kashi, avec l'angle en A compris entre AB et AC ; $\cos120^\circ=-0{,}5$.
   $BC^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times(-0{,}5)=52+24=76$
2. Une longueur est positive :
   $BC=\sqrt{76}=2\sqrt{19}\approx8{,}7$
3. b. Formule avec le cosinus :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times6\times(-0{,}5)=-12$
4. c. Al-Kashi en B : l'angle est compris entre $BA=4$ et $BC=\sqrt{76}$, en face de $AC=6$.
   $\cos\widehat{ABC}=\frac{4^2+76-6^2}{2\times4\times\sqrt{76}}=\frac{56}{8\sqrt{76}}=\frac{7}{\sqrt{76}}\approx0{,}803$
5. Calculatrice en degrés : $\widehat{ABC}\approx36{,}6^\circ$.
6. d. La somme des angles d'un triangle vaut 180° :
   $180-120-36{,}6=23{,}4$
   $\widehat{ACB}\approx23{,}4^\circ$.

---

6 Le travail d'une force

1. a. Deux normes et l'angle qu'elles forment : formule avec le cosinus, $\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   $W=40\times25\times\cos30^\circ=1000\times\frac{\sqrt{3}}{2}=500\sqrt{3}\approx866$
2. Le travail de la force vaut $500\sqrt{3}$ J, soit environ **866 J**.
3. b. $\vec{P}$ est vertical et $\overrightarrow{AB}$ horizontal : ils sont orthogonaux, donc $\vec{P}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. **Le travail du poids est nul**, quelle que soit sa valeur de 120 N : une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas.
4. c. On cherche l'angle θ tel que $40\times25\times\cos\theta=500$.
   $\cos\theta=\frac{500}{1000}=0{,}5$
5. Entre 0° et 90°, $\theta=60^\circ$: **il faudrait incliner la force de 60°**, et le travail serait divisé par $\sqrt{3}$.

---

7 Démontrer une orthogonalité sans repère

1. a. Relation de Chasles : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$.
2. b. $(DA) \perp (AB)$, donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. De même $(AB) \perp (BC)$, donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$.
3. $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$, donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}DA^2 = -\frac{a^2}{2}$.
4. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.
5. c. On développe par bilinéarité :
   $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = 0$
6. Le produit scalaire est nul et les vecteurs ne le sont pas : (DI) **et** (AJ) **sont perpendiculaires**.
7. d. $I(1\,;0)$ et $J(2\,;1)$, donc $\overrightarrow{DI}(1\,;-2)$ et $\overrightarrow{AJ}(2\,;1)$.
   $1 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$
   les deux méthodes concordent.

---

8 Ensembles de points

1. a. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$, car I est le milieu de $[AB]$.
2. En développant : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$, avec $IA = 4$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 16$.
3. b. $MI^2 - 16 = 9$ équivaut à $MI^2 = 25$, soit $MI = 5$: **le cercle de centre I et de rayon 5**.
4. c. $MI^2 = 16$, soit $MI = 4$: **le cercle de centre I et de rayon 4**, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$, A et B compris.
5. Pour -20 : $MI^2 = -4$, impossible pour un carré. **L'ensemble est vide.**
6. d. L'ensemble est le seul point I quand $MI^2 = 0$, c'est-à-dire $k + 16 = 0$: **pour $k = -16$**.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Choisir une méthode de calcul adaptée et l'appliquer sans faute de signe	4 pts	Projection sans comparer les sens ; angle lu entre deux vecteurs mis bout à bout
Démontrer une orthogonalité : produit nul, puis conclusion géométrique	4 pts	Calculer $xy' - x'y$ au lieu de $xx' + yy'$; conclure « l'un des vecteurs est nul »
Calculer un angle par son cosinus, arrondi annoncé	3 pts	Calculatrice en radians ; arrondir le cosinus avant de chercher l'angle
Al-Kashi ou développement des normes, avec le double produit	4 pts	Oublier $-2bc\cos\widehat{A}$; prendre un angle qui n'est pas en face du côté calculé
Ensemble de points : transformation de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, discussion, centre et rayon	5 pts	Transformation affirmée sans calcul ; ensemble sans centre ni rayon ; A et B retirés à tort