COURS

1re

Produit scalaire — Projection, cosinus et coordonnées

Programme de spécialité mathématiques de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602917A

Deux vecteurs, un nombre : le **produit scalaire** dit si $\vec{u}$ « va dans le sens » de $\vec{v}$, à contresens, ou ni l'un ni l'autre. Il se calcule de quatre façons — projection, cosinus, coordonnées, normes — et il démontre une perpendicularité, mesure un angle, calcule une longueur. Tout repose sur une équivalence : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ **si et seulement si** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux.**

1 Définition, projection et orthogonalité

DÉFINITION

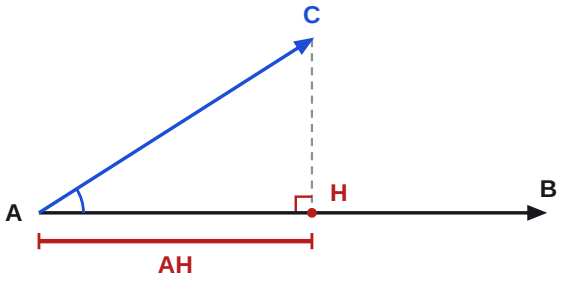
Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls. Leur **produit scalaire** est le **nombre réel** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\widehat{BAC}$, où $\widehat{BAC}$ est l'angle géométrique, entre 0° et 180°. Si l'un des vecteurs est nul, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Le **carré scalaire** vaut $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$, car $\cos 0^\circ=1$; ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$

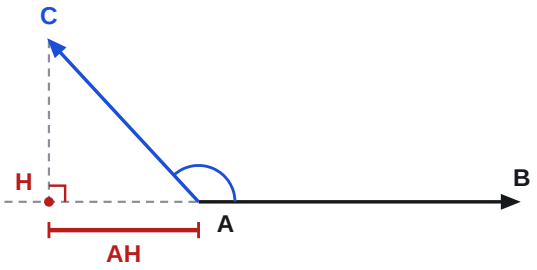
PROPRIÉTÉ

Projection (démontrée). Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$: il vaut $AB\times AH$ si H est sur la demi-droite $[AB)$, et $-AB\times AH$ sinon. *Preuve* : si $\widehat{BAC}$ est aigu, le triangle AHC est rectangle en H et $AH=AC\cos\widehat{BAC}$; s'il est obtus, $AH=AC\cos(180^\circ-\widehat{BAC})=-AC\cos\widehat{BAC}$; s'il est droit, $H=A$ et tout est nul.

angle aigu : H sur la demi-droite [AB)



angle obtus : H hors de la demi-droite [AB)



*À gauche, $\overrightarrow{AH}$ a le sens de $\overrightarrow{AB}$: produit positif. À droite, sens contraires : produit négatif. Seule l'**ombre** de C sur (AB) compte.*

PROPRIÉTÉ

Orthogonalité (démontrée). Deux vecteurs sont **orthogonaux** si l'un est nul ou si leurs directions sont perpendiculaires. Alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ **si et seulement si** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux** : pour des vecteurs non nuls, $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\neq 0$, donc le produit est nul exactement quand $\cos\widehat{BAC}=0$, soit un angle de 90°. De même, le **signe** du produit est celui du cosinus : positif pour un angle aigu, négatif pour un angle obtus.

CALCULER PAR PROJECTION

1. Écrire les deux vecteurs **avec la même origine**, au besoin à l'aide d'un vecteur égal ou opposé.
2. Projeter orthogonalement l'extrémité du second sur la droite qui porte le premier : c'est H.
3. **Comparer les sens** de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$: même sens, $AB\times AH$; sens contraires, $-AB\times AH$.

EXEMPLE

ABC est équilatéral de côté 6 et H est le milieu de $[AB]$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons.

1. Avec le cosinus, l'angle en A mesurant 60° :
   $6 \times 6 \times \cos 60° = 36 \times 0{,}5 = 18$
2. Avec la projection : la hauteur issue de C est aussi médiane, donc H est le projeté de C sur (AB), et $\overrightarrow{AH}$ a le sens de $\overrightarrow{AB}$.
   $AB \times AH = 6 \times 3 = 18$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$ **: les deux méthodes concordent.**

PIÈGE

Écrire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 \times 6 \times \cos 60° = 18$ dans ce triangle. — mis à la même origine, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ font un angle de 120°, pas 60° : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -18$.

Ce que ça coûte : le signe, et toute conclusion sur l'angle.

Le réflexe : ramener les vecteurs à une origine commune avant de lire un angle.

PIÈGE

Projeter, puis écrire $AB \times AH$ sans regarder les sens. — quand H est de l'autre côté de A, l'angle est obtus et le produit est **négatif**.

Ce que ça coûte : un résultat juste au signe près, donc faux.

Le réflexe : dessiner H, puis dire « même sens » ou « sens contraires » avant de multiplier.

PIÈGE

Conclure de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. — deux vecteurs non nuls perpendiculaires ont un produit scalaire nul : c'est tout l'intérêt de l'outil.

Ce que ça coûte : la question d'orthogonalité, entière.

Le réflexe : lire « produit nul » comme « orthogonaux », et conclure en géométrie.

2 Règles de calcul, coordonnées et normes

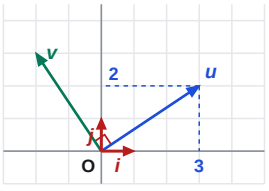
PROPRIÉTÉ

Symétrie et bilinéarité (admises). $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$: on développe comme un produit de sommes. **Développements (démontrés)** : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$, d'où les identités ci-dessous, et le calcul **avec les seules normes** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \qquad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

PROPRIÉTÉ

En base orthonormée (démontrée). Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée, $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Pour $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$, développer $(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$ donne $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. Donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $xx' + yy' = 0$; et $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$: **les coordonnées sont des produits scalaires** avec les vecteurs de la base.



$x = \vec{u} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$; ici $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

CHOISIR SA MÉTHODE DE CALCUL

1. **Des angles droits**, un projeté facile à placer : la **projection**.
2. **Un repère orthonormé** : $xx' + yy'$, avec $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$.
3. **Deux longueurs et l'angle qu'elles forment** : le **cosinus**.
4. **Seulement des longueurs** : les **normes**, ou Al-Kashi (partie 3).

pour un angle, $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$, calculatrice **en degrés**.

EXEMPLE

Repère orthonormé : $A(0\,;1)$, $B(2\,;2)$, $C(1\,;4)$. (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ? Mesurer $\widehat{BAC}$.

1. $\overrightarrow{AB}(2\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;3)$:
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 1 + 1\times 3 = 5$
   non nul : pas de perpendicularité ; positif : angle aigu.
2. Les normes :
   $AB = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$
3. Le cosinus :
   $\cos\widehat{BAC} = \frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Les droites ne sont pas perpendiculaires, et $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

PIÈGE

Calculer $xy' - x'y$ pour tester l'orthogonalité. — c'est le **déterminant**, qui teste la **colinéarité**. L'orthogonalité, c'est $xx' + yy'$.

Ce que ça coûte : la conclusion, même avec un calcul juste.

Le réflexe : abscisse avec abscisse, ordonnée avec ordonnée, et un **plus**.

PIÈGE

Trouver $\widehat{BAC} \approx 0{,}785$ et l'annoncer en degrés. — calculatrice restée **en radians** : $0{,}785 \approx \frac{\pi}{4}$ rad, soit 45°.

Ce que ça coûte : la mesure, et chaque calcul qui s'en sert.

Le réflexe : régler le mode degré avant $\arccos$; cosinus positif, angle aigu.

PIÈGE

Écrire $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. — c'est oublier le **double produit** $2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$, nul seulement pour des vecteurs orthogonaux (Pythagore).

Ce que ça coûte : une longueur fausse, sans erreur visible.

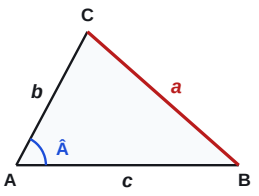
Le réflexe : développer comme $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3 Al-Kashi et l'expression MA · MB

RÈGLE

Formule d'Al-Kashi. Dans un triangle ABC, avec $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. *Démonstration* : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + AB^2$, et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = bc\cos\widehat{A}$. Si $\widehat{A} = 90^\circ$, on retrouve **Pythagore**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$



Le côté a fait face à l'angle $\widehat{A}$, que les côtés b et c encadrent.

EXEMPLE

$AB = 5$, $AC = 8$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Calculer BC, contrôler $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec les normes, mesurer $\widehat{B}$.

1. Al-Kashi en A :
   $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times 5\times 8\times 0{,}5 = 89 - 40 = 49$
   donc $BC = 7$.
2. Normes, avec $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$:
   $\frac{1}{2}(5^2 + 8^2 - 7^2) = 20 = 5\times 8\times 0{,}5$
3. Al-Kashi en B, angle compris entre $BA = 5$ et $BC = 7$, face à $AC = 8$:
   $\cos\widehat{B} = \frac{5^2+7^2-8^2}{2\times 5\times 7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$

$BC = 7$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 20$ et $\widehat{B} \approx 81{,}8^\circ$.

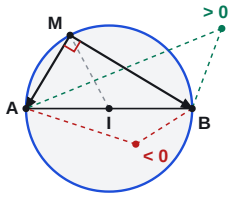
PROPRIÉTÉ

Transformation (démontrée). Soit I le milieu de $[AB]$. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$, donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$, avec $IA = \frac{AB}{2}$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

PROPRIÉTÉ

Théorème (démontré). L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre** $[AB]$. *Preuve* : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 = \dfrac{AB^2}{4} \iff MI = \dfrac{AB}{2}$, car une distance est positive. A et B en font partie ; en tout autre point M du cercle, AMB est rectangle en M.



Produit nul sur le cercle, négatif dans le disque, positif au-dehors.

ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE MA · MB = K

1. Transformer : $MI^2 = k + \dfrac{AB^2}{4}$.
2. Si ce nombre est positif : **cercle** de centre I, de rayon **sa racine carrée** ; nul : le **point** I ; négatif : ensemble **vide**.

EXEMPLE

$AB = 6$. Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$?

1. $IA = 3$, donc $MI^2 - 9 = 16$:
   $MI^2 = 16 + 9 = 25$
   et $MI = 5$.

Le cercle de centre I et de rayon 5.

PIÈGE

Dans Al-Kashi, prendre un angle qui ne fait pas face au côté calculé. — la formule lie a à l'angle **opposé**, compris entre b et c.

Ce que ça coûte : le calcul entier.

Le réflexe : nommer l'angle, puis son côté opposé, puis les deux côtés qui l'encadrent.

PIÈGE

Trouver $MI^2 = 25$ et annoncer un rayon de 25. — MI^2 est un **carré** : le rayon est $\sqrt{25} = 5$.

Ce que ça coûte : le rayon, donc l'ensemble.

Le réflexe : finir par « $MI = \ldots$ », puis nommer centre et rayon.

PIÈGE

Répondre « le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B ». — en $M = A$, $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ et le produit est nul : A et B sont dans l'ensemble.

Ce que ça coûte : un ensemble incomplet.

Le réflexe : tester $M = A$ et $M = B$ dans l'égalité.

Le XIX^{e} siècle a vu naître ensemble le produit scalaire et le **travail** d'une force en physique : $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. Vecteur normal à une droite, projeté d'un point sur une droite et équation de cercle en repère orthonormé : voir la fiche « Géométrie repérée ».

À VÉRIFIER

- Calculer un produit scalaire par **projection**, en comparant les sens.
- Le calculer avec un **cosinus**, des **coordonnées** ou des **normes**, selon les données.
- Démontrer une **orthogonalité**, puis conclure en géométrie.
- Mesurer un **angle** par son cosinus, calculatrice en degrés.
- Appliquer et **démontrer** la formule d'Al-Kashi.
- Transformer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ et déterminer un **ensemble de points**.

À RETENIR

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\text{angle})$; par projection, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ selon les sens.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- En base orthonormée : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$ et $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$.
- $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$: le double produit ne s'oublie pas.
- Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, l'angle en face du côté a.
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$; il est nul exactement sur le cercle de diamètre $[AB]$.