

Fonctions du second degré — discriminant, forme canonique et signe

Corrigé détaillé
7 exercices

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Calculer le discriminant et donner le nombre de racines.

- ① a. $a = 1, b = -5, c = 6$.
 $25 - 24 = 1$
 $\Delta > 0$: deux racines.
- ② b. $a = 1, b = -4, c = 4$.
 $16 - 16 = 0$
 $\Delta = 0$: une racine double.
- ③ c. $a = 1, b = 1, c = 1$.
 $1 - 4 = -3$
 $\Delta < 0$: aucune racine réelle.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- ① a. $\Delta = 1$, donc $\sqrt{\Delta} = 1$.
 $\frac{5-1}{2} = 2$
- ② Et la seconde racine.
 $\frac{5+1}{2} = 3$
 $S = \{2; 3\}$.
- ③ b. $4ac = 4 \times 3 \times (-2) = -24$, donc $\Delta = 25 + 24 = 49$.
 $\frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}$
- ④ Puis l'autre.
 $\frac{5+7}{6} = 2$
 $S = \{-\frac{1}{3}; 2\}$.
- ⑤ c. $\Delta = 0$: racine double.
 $\frac{4}{2} = 2$
 $S = \{2\}$.

3 Mettre sous forme canonique, puis donner l'extrémum.

- ① a. $\alpha = \frac{6}{2} = 3$, puis $\beta = f(3)$.
 $9 - 18 + 11 = 2$
- ② Donc $f(x) = (x - 3)^2 + 2$.
 $1 \times 2 = 2$
 $a = 1 > 0$: minimum 2 atteint en $x = 3$.
- ③ b. $\alpha = \frac{-4}{-2} = 2$, puis $\beta = g(2)$.
 $-4 + 8 - 1 = 3$
- ④ Donc $g(x) = -(x - 2)^2 + 3$.
 $-1 \times -3 = 3$
 $a = -1 < 0$: maximum 3 atteint en $x = 2$.

4 Étudier le signe, puis résoudre l'inéquation.

- ① a. Racines 2 et 3, et $a = 1 > 0$: positif à l'extérieur, négatif entre les racines.
 $25 - 24 = 1$
- ② b. L'inégalité étant large, les racines sont incluses.
 $3 - 2 = 1$
 $S = [2; 3]$.
- ③ c. $\Delta = 16 - 12 = 4$, racines $\frac{-4 \pm 2}{-2}$, soit 1 et 3.
 $\frac{-4+2}{-2} = 1$
- ④ Ici $a = -1 < 0$: le trinôme est positif **entre** les racines.
 $\frac{-4-2}{-2} = 3$
 $S =]1; 3[$ — bornes exclues, l'inégalité étant stricte.
-

5 Un rectangle a un périmètre de 20 cm et une aire de 21 cm².

- ① a. Le demi-périmètre vaut 10, donc l'autre côté mesure $10 - x$, et l'aire s'écrit $x(10 - x) = 21$.
 $20 \div 2 = 10$
- ② En développant et en ordonnant : $x^2 - 10x + 21 = 0$.
 $100 - 84 = 16$
- ③ b. $\sqrt{16} = 4$, d'où les deux racines.
 $\frac{10-4}{2} = 3$
- ④ Et la seconde.
 $\frac{10+4}{2} = 7$
les deux racines décrivent le **même** rectangle, 7 cm sur 3 cm.
- ⑤ c. Avec 30 cm² : $x^2 - 10x + 30 = 0$ et $\Delta = 100 - 120$.
 $100 - 120 = -20$
 $\Delta < 0$: aucun rectangle de périmètre 20 cm n'a une aire de 30 cm².
-

6 Factoriser lorsque c'est possible, et justifier sinon.

- ① a. $\Delta = 9 + 16 = 25$, racines -2 et $\frac{1}{2}$.
 $9 + 16 = 25$
- ② On n'oublie pas le facteur $a = 2 : 2(x + 2)(x - \frac{1}{2})$.
 $2 \times 1 = 2$
le coefficient dominant du produit doit valoir 2.
- ③ b. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: pas de racine réelle, donc pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.
 $4 - 20 = -16$
- ④ c. On remplace le numérateur par sa forme factorisée et on simplifie par $(x + 2)$.
 $2 \times 0.5 = 1$
il reste $2x - 1$.
-

7 Se ramener au second degré.

- ① a. Ce sont les racines de $x^2 + x - 6 = 0$.
 $1 + 24 = 25$
- ② $\sqrt{25} = 5$, d'où les deux racines.
 $\frac{-1-5}{2} = -3$
et $\frac{-1+5}{2} = 2$: les nombres sont -3 et 2 .
- ③ b. On pose $X = x^2$: $X^2 - 5X + 4 = 0$, de discriminant $25 - 16 = 9$.
 $25 - 16 = 9$
- ④ D'où $X = 1$ ou $X = 4$, tous deux positifs.
 $\frac{5+3}{2} = 4$
- ⑤ On revient à x : $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$.
 $\sqrt{4} = 2$
 $S = \{-2; -1; 1; 2\}$ — quatre solutions, une par racine carrée et son opposé.
- ⑥ c. On ramène tout d'un côté : $x^2 - 4x + 3 = 0$.
 $16 - 12 = 4$
- ⑦ $\sqrt{4} = 2$, d'où les racines.
 $\frac{4-2}{2} = 1$
et $\frac{4+2}{2} = 3$: $S = \{1; 3\}$.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Identifier a , b , c avec leur signe	2 pts	Un b noté positif alors qu'il vaut -5
Calculer Δ exactement	4 pts	$-4ac$ traité comme une soustraction quand $c < 0$
Conclure selon le signe de Δ	3 pts	Des racines annoncées avec $\Delta < 0$
Forme canonique et extrémum justifié	4 pts	Le minimum lu sur la courbe au lieu d'être démontré
Tableau de signe et intervalles	4 pts	Une inéquation résolue en divisant par une expression en x
Retour au contexte du problème	3 pts	Deux dimensions annoncées comme deux rectangles différents