

COURS

Fonctions du second degré — discriminant, forme canonique et signe

1^{re}

Programme de première générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Le second degré est le premier chapitre où l'on ne cherche plus **une** valeur de x , mais où l'on décrit le **comportement** d'une fonction sur tout $\mathbb{R}$: où elle s'annule, où elle est positive, où elle atteint son minimum. Trois écritures d'un même trinôme servent à cela, et chacune répond à une question que les deux autres ne savent pas traiter. Savoir laquelle choisir vaut plus que savoir calculer vite.

1 Trois écritures, trois usages

RÈGLE

Un **trinôme** du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa **forme développée** donne l'ordonnée à l'origine $f(0) = c$ et le sens de la parabole par le signe de a . Sa **forme canonique** $a(x - \alpha)^2 + \beta$ donne le sommet, donc l'extrémum et l'axe de symétrie. Sa **forme factorisée** $a(x - x_1)(x - x_2)$, quand elle existe, donne les racines. On ne les calcule pas toutes les trois : on choisit celle que la question réclame.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta = a(x - x_1)(x - x_2)$$

DÉFINITION

La **forme canonique** est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Le carré $(x - \alpha)^2$ étant toujours positif ou nul, et nul seulement en $x = \alpha$, la fonction atteint en ce point son **minimum** β si $a > 0$, son **maximum** β si $a < 0$. C'est un raisonnement complet, et non un résultat à retenir : la forme canonique **démontre** l'extrémum au lieu de le lire sur un graphique.

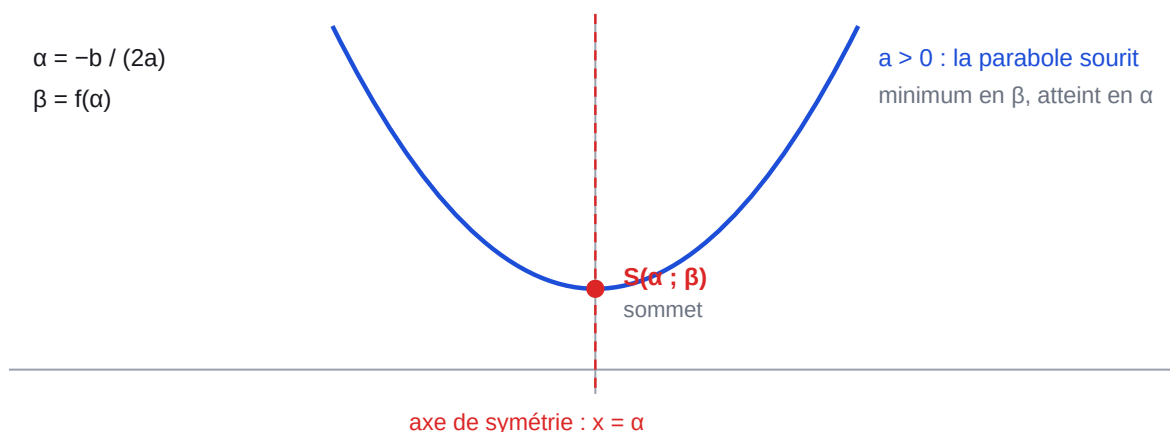
$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

la forme canonique se lit directement sur la courbe

$$\alpha = -b / (2a)$$

$$\beta = f(\alpha)$$

$a > 0$: la parabole sourit
minimum en β , atteint en α



Le sommet, l'axe de symétrie et l'extrémum se lisent sur la forme canonique.

EXEMPLE

Mettre $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ sous forme canonique, et en déduire son minimum.

- ① On identifie $a = 2$, $b = -8$, $c = 5$, puis on calcule α .

$$\frac{-(-8)}{2 \times 2} = 2$$

- ② On calcule $\beta = f(2)$.

$$2 \times 4 - 8 \times 2 + 5 = -3$$

- ③ On écrit la forme canonique et on conclut.

$$2(x - 2)^2 - 3$$

le carré est nul en $x = 2$ et positif ailleurs ; comme $a = 2 > 0$, le minimum vaut -3 .

$f(x) = 2(x - 2)^2 - 3$: minimum -3 , atteint en $x = 2$.

2 Le discriminant

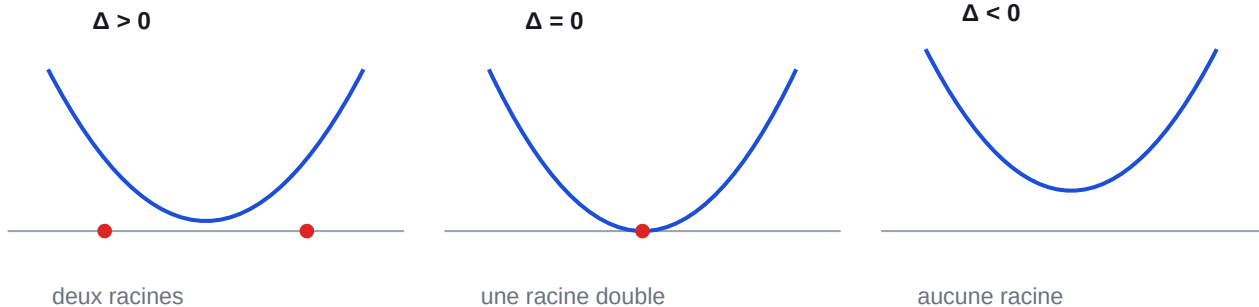
RÈGLE

Le **discriminant** est $\Delta = b^2 - 4ac$. Son signe décide à lui seul du nombre de racines. Si $\Delta > 0$, deux racines distinctes

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Si $\Delta = 0$, une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Si $\Delta < 0$, aucune racine réelle — la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, et le trinôme garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad ; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

le signe de Δ dit combien de fois la parabole coupe l'axe



Trois signes de Δ , trois positions de la parabole par rapport à l'axe.

RÉSOLVRE $AX^2 + BX + C = 0$

- ① **Écrire a, b, c avec leur signe**, séparément et avant tout calcul. La moitié des erreurs de ce chapitre naissent d'un b noté positif alors qu'il vaut -5 .
- ② **Calculer $4ac$ à part**, puis le soustraire. Enchaîner $b^2 - 4ac$ d'un seul geste quand c est négatif produit une soustraction là où il fallait une addition.
- ③ **Regarder le signe de Δ** et n'aller plus loin que s'il est positif ou nul. Chercher des racines quand $\Delta < 0$ n'est pas une maladresse, c'est une faute de raisonnement.
- ④ **Appliquer la formule**, en gardant $2a$ au dénominateur des deux racines.
si a est négatif, $2a$ l'est aussi : la plus grande racine est alors celle qui porte le signe $-$.
- ⑤ **Vérifier par la somme et le produit** : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Deux additions mentales qui attrapent presque toutes les erreurs de calcul.

EXEMPLE

Résoudre $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

① On pose $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$, puis on calcule $4ac$ à part.

$$4 \times 2 \times (-2) = -16$$

② On en déduit le discriminant.

$$9 - (-16) = 25$$

c étant négatif, $-4ac$ ajoute 16 : c'est le passage où l'on se trompe.

③ $\Delta > 0$: deux racines, avec $\sqrt{25} = 5$.

$$\frac{-3-5}{4} = -2$$

④ Puis la seconde.

$$\frac{-3+5}{4} = 0.5$$

⑤ On vérifie par la somme et le produit.

$$-2 + 0.5 = -1.5$$

$$\text{et } \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2} = -1,5 : \text{cohérent.}$$

$$S = \left\{ -2; \frac{1}{2} \right\}$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 - 16 = -7$. — le produit $4ac$ vaut -16 ; le soustraire revient à **ajouter** 16. En traitant $-4ac$ comme une soustraction quand c est négatif, on transforme deux racines en aucune — et l'erreur est invisible, puisque la conclusion « pas de solution » est une conclusion possible.

Le réflexe : calculer $4ac$ seul, l'écrire sur une ligne avec son signe, puis seulement faire la soustraction.

PROPRIÉTÉ

Lorsque le trinôme a deux racines, leur **somme** vaut $\frac{-b}{a}$ et leur **produit** $\frac{c}{a}$. C'est d'abord une vérification gratuite après tout calcul de racines. C'est aussi un outil de résolution : deux nombres de somme S et de produit P sont exactement les racines de $x^2 - Sx + P = 0$ — ce qui transforme un problème de partage en une équation du second degré, sans passer par un système.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} ; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

EXEMPLE

Deux nombres ont pour somme 7 et pour produit 12. Les déterminer sans poser de système.

① Ce sont les racines de $x^2 - Sx + P = 0$, soit $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$$49 - 48 = 1$$

② $\Delta = 1 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = 1$ et deux racines.

$$\frac{7-1}{2} = 3$$

③ Puis la seconde.

$$\frac{7+1}{2} = 4$$

④ On vérifie sur l'énoncé.

$$3 \times 4 = 12$$

et $3 + 4 = 7$: les deux conditions sont satisfaites.

Les deux nombres sont 3 et 4.

SE RAMENER AU SECOND DEGRÉ

① **Une équation bicarrée** $ax^4 + bx^2 + c = 0$: poser $X = x^2$, résoudre en X , puis revenir à x — et ne garder que les X positifs, un carré ne pouvant être négatif.

② **Une équation avec quotient** : chasser le dénominateur après avoir posé sa condition d'existence, puis vérifier que les solutions trouvées la respectent.

③ **Une comparaison de deux fonctions** $f(x) = g(x)$: tout ramener dans un membre pour obtenir $f(x) - g(x) = 0$, et étudier le trinôme obtenu.

la même translation vaut pour $f(x) > g(x)$, qui devient un signe de trinôme.

3 Le signe du trinôme

RÈGLE

Un trinôme est **du signe de a partout, sauf entre les racines** lorsqu'il en a deux. C'est la formule à retenir, et elle couvre les trois cas : si $\Delta < 0$ il n'y a pas d'« entre », donc le signe de a sur tout $\mathbb{R}$; si $\Delta = 0$, l'intervalle entre les racines est vide et le trinôme s'annule en un point. Une **inéquation du second degré** se résout par ce tableau de signe, jamais en divisant les deux membres par une expression contenant x — dont on ignore le signe.

« du signe de a sauf entre les racines » — quand $\Delta > 0$

x	x_1	x_2	
signe de a		signe de $-a$	signe de a

si $\Delta = 0$: signe de a partout, sauf en x_0 où le trinôme s'annule

si $\Delta < 0$: signe de a partout, sans exception

une inéquation du second degré se résout donc par ce tableau, jamais par division

Le tableau de signe d'un trinôme, dans les trois cas possibles.

La factorisation $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ n'existe **que** si $\Delta \geq 0$, et elle se déduit des racines sans nouveau calcul : c'est le moyen le plus rapide de résoudre $f(x) > 0$ ou de simplifier un quotient. Attention au facteur a , oublié une fois sur deux : $2x^2 + 3x - 2$ se factorise en $2(x + 2)(x - \frac{1}{2})$, et non en $(x + 2)(x - \frac{1}{2})$, dont le coefficient dominant vaudrait 1.

À VÉRIFIER

- Ai-je écrit a, b, c avec leur signe avant de calculer Δ ?
- Ai-je calculé $4ac$ **séparément** avant de le soustraire ?
- Ai-je conclu sur le **signe de Δ** avant de chercher des racines ?
- Ai-je vérifié par la **somme** $\frac{-b}{a}$ et le **produit** $\frac{c}{a}$?
- Pour une inéquation : ai-je fait un **tableau de signe** plutôt qu'une division ?
- Dans une factorisation, ai-je gardé le facteur a devant les parenthèses ?

À RETENIR

- $\Delta = b^2 - 4ac$ — calculer $4ac$ **à part**, puis soustraire.
- $\Delta > 0$: deux racines · $\Delta = 0$: une double · $\Delta < 0$: aucune.
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, et b se prend avec son signe.
- Vérification : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
- Forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
- Signe : **du signe de a sauf entre les racines**.
- Factorisation $a(x - x_1)(x - x_2)$ — le facteur a reste devant.