

COURS

Suites numériques — arithmétiques, géométriques, sommes

1^{re}

Programme de première générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Une suite est une liste de nombres indexée par les entiers, et l'essentiel du chapitre tient dans une seule question : **comment passe-t-on d'un terme au suivant ?** Deux réponses reviennent partout — on ajoute toujours la même chose, ou on multiplie toujours par la même chose. Elles décrivent respectivement une épargne à intérêts simples et une population qui croît d'un pourcentage fixe, et elles n'ont ni la même formule, ni la même allure, ni les mêmes conséquences à long terme.

1 Deux façons d'avancer

DÉFINITION

Une suite (u_n) est **arithmétique de raison r** si l'on passe de chaque terme au suivant en **ajoutant** toujours r : $u_{n+1} = u_n + r$. Cette relation est la **définition par récurrence** ; elle donne le terme suivant, mais pas le centième sans passer par les quatre-vingt-dix-neuf premiers. Le **terme général** $u_n = u_0 + nr$ règle ce problème : il donne n'importe quel terme directement, parce qu'on a ajouté r exactement n fois depuis u_0 .

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_n = u_0 + nr$$

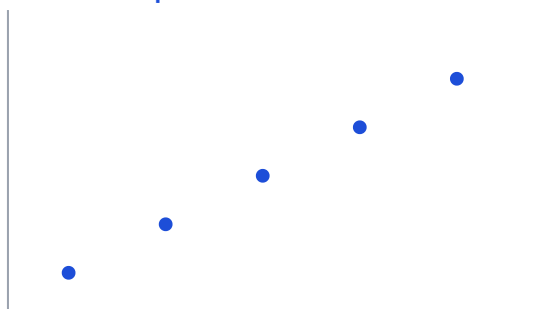
DÉFINITION

Une suite (u_n) est **géométrique de raison q** si l'on passe de chaque terme au suivant en **multipliant** toujours par q : $u_{n+1} = q \times u_n$. Son terme général est $u_n = u_0 \times q^n$, pour la même raison : on a multiplié n fois. Une hausse de 4 % par an est une suite géométrique de raison 1,04 — et non 0,04 : la raison est le **coefficient multiplicateur**, pas le pourcentage.

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et} \quad u_n = u_0 \times q^n$$

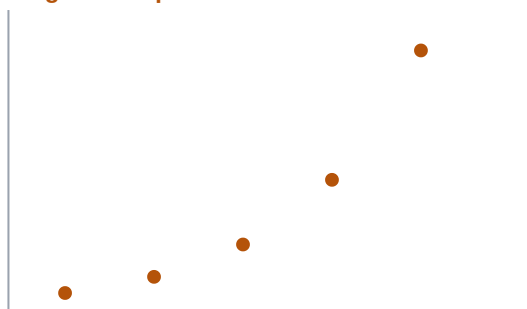
on ajoute toujours la même chose, ou on multiplie toujours par la même chose

arithmétique



+ r à chaque pas : points alignés

géométrique



$\times q$ à chaque pas : la courbe s'emballe

Une suite arithmétique aligne ses points ; une suite géométrique les courbe.

RECONNAÎTRE LA NATURE D'UNE SUITE

- 1 **Calculer les différences** $u_1 - u_0, u_2 - u_1, u_3 - u_2$. Si elles sont toutes égales, la suite est arithmétique et cette valeur commune est r .
- 2 **Sinon, calculer les quotients** $\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_1}$. S'ils sont tous égaux, la suite est géométrique de raison q .
- 3 **Conclure sur trois quotients au moins** : deux valeurs égales ne prouvent rien, et l'énoncé attend une démonstration, pas une constatation.
pour démontrer, on part de u_{n+1} écrit avec n quelconque, et l'on montre que la différence — ou le quotient — ne dépend pas de n .
- 4 **Attention à l'indice de départ**. Si la suite commence à u_1 , le terme général devient $u_n = u_1 + (n - 1)r$, et $u_n = u_1 \times q^{n-1}$: on n'a fait que $n - 1$ pas.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $u_n = u_1 + nr$ pour une suite qui commence à u_1 . — entre u_1 et u_n , on ajoute r exactement $n - 1$ fois, pas n .
L'erreur décale toute la suite d'un cran et fausse chaque question suivante, sans jamais produire d'absurdité visible.

Le réflexe : tester la formule sur le premier terme. Avec $n = 1$, elle doit redonner u_1 : si elle donne $u_1 + r$, l'indice est faux.

2 Le sens de variation

RÈGLE

Pour une suite **arithmétique**, le signe de r décide seul : croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$, constante si $r = 0$. Pour une suite **géométrique** à termes strictement positifs, c'est la position de q par rapport à 1 qui décide : croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$. Si $q < 0$, les termes changent de signe à chaque pas et la suite n'est ni croissante ni décroissante — elle **alterne**.

le sens de variation se lit sur la raison, sans calculer un seul terme

arithmétique — raison r

$r > 0$: croissante
 $r = 0$: constante
 $r < 0$: décroissante
toujours, quel que soit u_0

géométrique — raison $q > 0$

$q > 1$: croissante si $u_0 > 0$
 $0 < q < 1$: décroissante si $u_0 > 0$
 $q < 0$: les termes alternent
le signe de u_0 renverse tout

Le sens de variation se lit sur la raison, sans calculer aucun terme.

CHERCHER UN SEUIL

- 1 **Écrire l'inégalité** que doit vérifier le rang cherché : $u_n > S$, ou $u_n < S$ selon la question.
- 2 **Calculer les termes de proche en proche** jusqu'à franchir le seuil — à la calculatrice ou par un petit programme, la relation de récurrence suffit.
- 3 **Donner le premier rang qui convient**, et lui seul. La réponse est un entier, pas un intervalle : c'est le plus petit n tel que l'inégalité soit vraie.
- 4 **Vérifier les deux côtés** : le rang trouvé doit satisfaire l'inégalité, et le rang précédent ne doit pas la satisfaire.
c'est ce double contrôle qui prouve qu'on a bien le **premier** rang, et non simplement un rang qui marche.

EXEMPLE

Une population de 5 000 bactéries augmente de 20 % par heure. Au bout de combien d'heures dépasse-t-elle 10 000 ?

- ① La population suit une suite géométrique de raison 1,20.

$$1 + 0.2 = 1.2$$

- ② On calcule de proche en proche : après une heure, puis deux.

$$5000 \times 1.2 = 6000$$

- ③ Puis les suivantes.

$$6000 \times 1.2 = 7200$$

- ④ On continue jusqu'au franchissement.

$$7200 \times 1.2 = 8640$$

- ⑤ L'heure suivante dépasse le seuil.

$$8640 \times 1.2 = 10368$$

la quatrième heure donne $10\,368 > 10\,000$, la troisième $8\,640 < 10\,000$: le seuil est bien franchi à la quatrième heure.

Il faut 4 heures.

3 Sommer les termes

RÈGLE

La somme des entiers de 1 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. Plus généralement, la somme des termes consécutifs d'une suite **arithmétique** se calcule comme le **nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier** — c'est la seule chose à retenir, et elle se redémontre en appariant les termes des deux extrémités. Pour une suite **géométrique** de raison $q \neq 1$, la somme des $n + 1$ premiers termes vaut $u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$$

EXEMPLE

Une salle de spectacle compte 12 rangs. Le premier a 20 places, et chaque rang suivant en a 3 de plus. Combien de places en tout ?

- ① Le nombre de places par rang forme une suite arithmétique de premier terme 20 et de raison 3.

$$20 + 3 = 23$$

- ② Le douzième rang correspond à onze pas depuis le premier.

$$20 + 11 \times 3 = 53$$

- ③ On applique la formule : douze termes, moyenne des extrêmes.

$$\frac{20+53}{2} = 36.5$$

- ④ D'où le total.

$$12 \times 36.5 = 438$$

la moyenne n'est pas entière, mais le total l'est : c'est normal, on multiplie par un nombre pair de rangs.

La salle compte 438 places.

La différence entre les deux modèles est spectaculaire à long terme, et c'est tout l'enjeu du chapitre. Placer 1 000 € à 5 % d'**intérêts simples** ajoute 50 € chaque année : au bout de vingt ans, 2 000 €. À 5 % d'**intérêts composés**, on multiplie chaque année par 1,05, et l'on obtient $1000 \times 1,05^{20} \approx 2653$ €. Le même taux, la même durée, et six cent cinquante euros d'écart — parce qu'une suite géométrique fait porter les intérêts sur les intérêts.

PROPRIÉTÉ

Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ des $n + 1$ premiers termes vaut $u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. On retient l'énoncé sous sa forme parlante : **premier terme, fois un moins la raison à la puissance nombre de termes, sur un moins la raison**. L'exposant compte les **termes**, pas les pas — c'est là que l'on se trompe, et un test sur $n = 0$ le vérifie en trois secondes : la formule doit alors rendre u_0 .

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

EXEMPLE

Une entreprise vend 200 unités le premier mois, puis 10 % de plus chaque mois. Combien d'unités aura-t-elle vendues au total sur six mois ?

- ① Les ventes mensuelles forment une suite géométrique de premier terme 200.

$$1 + 0.1 = 1.1$$

- ② Six mois, ce sont six termes : u_0 à u_5 , donc l'exposant vaut 6.

$$1.1^6 = 1.771561$$

- ③ On applique la formule de la somme.

$$\frac{1 - 1.771561}{1 - 1.1} = 7.71561$$

- ④ Puis on multiplie par le premier terme.

$$200 \times 7.71561 = 1543.122$$

on arrondit à l'unité : les ventes se comptent en entiers.

Environ 1 543 unités sur les six mois.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Prendre $q = 0,03$ pour une hausse annuelle de 3 %. — multiplier par 0,03 ne fait pas augmenter, cela divise par trente-trois : un capital de 2 000 € tomberait à 60 € en un an. La raison d'une suite géométrique est le **coefficient multiplicateur** $1 + \frac{t}{100}$, et une baisse de 3 % donne 0,97, jamais $-0,03$.

Le réflexe : appliquer la raison au premier terme et regarder le résultat. S'il s'effondre alors que l'énoncé annonce une hausse, la raison est fausse.

La formule de la somme arithmétique n'est pas à apprendre : elle se retrouve. Pour additionner $1 + 2 + \dots + 100$, on écrit la somme dans un sens puis dans l'autre, et l'on apparie les termes de rang opposé : $1 + 100, 2 + 99, 3 + 98 \dots$ Chaque paire vaut 101, il y en a cent, donc le double de la somme vaut 100×101 . On divise par deux et l'on obtient 5 050. La même manœuvre marche sur n'importe quelle suite arithmétique, et c'est de là que vient la « moyenne des extrêmes ».

À VÉRIFIER

- Ai-je bien distingué la **relation de récurrence** du **terme général** ?
- Ai-je vérifié l'**indice de départ** : u_0 ou u_1 ?
- Ai-je testé mon terme général sur le **premier terme** ?
- Pour un pourcentage, ai-je pris le **coefficient multiplicateur** et non le taux ?
- Pour une somme, ai-je compté le **nombre de termes** — bornes incluses ?
- Ai-je justifié la nature de la suite pour un n **quelconque**, et non sur trois exemples ?

À RETENIR

- Arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + nr$.
- Géométrique : $u_{n+1} = q u_n$ et $u_n = u_0 \times q^n$.
- Départ à u_1 : $u_n = u_1 + (n - 1)r$ — un pas de moins.
- Hausse de t % : raison $q = 1 + \frac{t}{100}$, jamais $\frac{t}{100}$.
- Variation : signe de r · position de q par rapport à 1.
- Somme arithmétique = nombre de termes $\times$ $\frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.
- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$.