CORRIGÉ

1re

Corrigé détaillé
8 exercices

Variables aléatoires — Loi, espérance et variance

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Un QCM comporte quatre questions. On note X le nombre de bonnes réponses d'un candidat qui répond au hasard.

1. **a.** « Au moins 3 » inclut 3 : $\{X \geqslant 3\}$, c'est-à-dire $\{X = 3\} \cup \{X = 4\}$.
2. **b.** « Moins de 2 » exclut 2 : $\{X < 2\} = \{X \leqslant 1\}$, soit 0 ou 1 bonne réponse.
3. **c.** $\{X \leqslant 3\}$: « le candidat a au plus 3 bonnes réponses ». Son contraire est $\{X > 3\} = \{X = 4\}$: « toutes ses réponses sont justes ». **d.** X ne dépasse jamais 4 : $\{X > 4\}$ est impossible, donc $P(X > 4) = 0$.
4. **e.** $\{X \leqslant 3\}$ est le contraire de $\{X = 4\}$:
   $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
   donc $P(X \leqslant 3) = \dfrac{15}{16}$.

2 La loi d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau : valeurs -1, 0, 2 et 5, de probabilités respectives 0,3 ; 0,25 ; a et 0,1.

1. **a.** La somme des probabilités vaut 1 :
   $1 - (0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}1) = 0{,}35$
   $a = 0{,}35$.
2. **b.** $\{X \geqslant 0\}$ regroupe les valeurs 0, 2 et 5, et $\{X \leqslant 2\}$ est le contraire de $\{X = 5\}$, d'où $P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.
   D'autre part :
   $0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}1 = 0{,}7$
3. **c.** On pondère chaque valeur par sa probabilité :
   $-1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}35 + 5 \times 0{,}1 = 0{,}9$
4. Conclusion : $a = 0{,}35$, $P(X \geqslant 0) = 0{,}7$, $P(X \leqslant 2) = 0{,}9$ et $E(X) = 0{,}9$.

3 Un sac contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On tire un jeton, on note son numéro, on le remet, puis on en tire un second. X est la somme des deux numéros.

1. **a.** Le jeton est remis : le second tirage se fait dans les mêmes conditions que le premier. Chacun des 9 couples (premier numéro, second numéro) a la probabilité $\dfrac{1}{9}$.
   $3 \times 3 = 9$
2. **b.** Sommes : 2 pour (1, 1) ; 3 pour (1, 2) et (2, 1) ; 4 pour (1, 3), (2, 2) et (3, 1) ; 5 pour (2, 3) et (3, 2) ; 6 pour (3, 3).
3. D'où $P(X = 2) = P(X = 6) = \dfrac{1}{9}$, $P(X = 3) = P(X = 5) = \dfrac{2}{9}$ et $P(X = 4) = \dfrac{3}{9}$. Contrôle :
   $\frac{1+2+3+2+1}{9} = 1$
4. **c.** Cinq bâtons, aux abscisses 2 à 6, de hauteurs proportionnelles à 1, 2, 3, 2 et 1 (par exemple 2 carreaux pour $\dfrac{1}{9}$), axe des probabilités gradué à partir de 0. Le diagramme est symétrique par rapport à 4.
5. **d.** Avec la loi :
   $\frac{2\times1+3\times2+4\times3+5\times2+6\times1}{9} = \frac{36}{9} = 4$
6. Par linéarité : chaque numéro tiré a pour espérance 2, et X est la somme des deux numéros.
   $\frac{1+2+3}{3} + \frac{1+2+3}{3} = 4$
   les deux méthodes donnent $E(X) = 4$.

4 **Une machine tombe en panne 0, 1 ou 2 fois par semaine. Le nombre X de pannes d'une semaine suit la loi : $P(X=0)=0{,}2$, $P(X=1)=0{,}5$ et $P(X=2)=0{,}3$.**

1. **a.** Espérance :
   $0\times 0{,}2+1\times 0{,}5+2\times 0{,}3=1{,}1$
   sur un grand nombre de semaines, la machine tombe en panne 1,1 fois par semaine en moyenne.
2. **b.** $E(X^2)=0^2\times 0{,}2+1^2\times 0{,}5+2^2\times 0{,}3=1{,}7$, puis König-Huygens :
   $1{,}7-1{,}1^2=0{,}49$
   $V(X)=0{,}49$ et $\sigma(X)=\sqrt{0{,}49}=0{,}7$ panne.
3. **c.** Définition, avec $\mu=1{,}1$:
   $0{,}2\times(0-1{,}1)^2+0{,}5\times(1-1{,}1)^2+0{,}3\times(2-1{,}1)^2=0{,}49$
4. **d.** $C=400X+100$, et par linéarité :
   $400\times 1{,}1+100=540$
   le coût moyen est de 540 € par semaine.

---

5 **Pour jouer, on paie une mise de m euros, puis on lance deux pièces équilibrées. Deux « pile » : on reçoit 10 € ; un seul « pile » : 2 € ; aucun : rien.**

1. **a.** Quatre issues équiprobables : PP, PF, FP, FF. Donc $P(R=10)=\dfrac{1}{4}$, $P(R=2)=\dfrac{2}{4}$ et $P(R=0)=\dfrac{1}{4}$, et :
   $10\times\frac{1}{4}+2\times\frac{2}{4}+0\times\frac{1}{4}=3{,}5$
2. **b.** $G=R-3$ prend les valeurs 7, -1 et -3, avec les probabilités $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{2}{4}$ et $\dfrac{1}{4}$.
   $7\times\frac{1}{4}-1\times\frac{2}{4}-3\times\frac{1}{4}=0{,}5$
   on retrouve $E(R)-3=0{,}5$: $E(G)>0$, le jeu est favorable au joueur.
3. **c.** Le jeu est équitable si $E(G)=E(R)-m=0$: la mise équitable est $m=E(R)$, soit 3,50 €.
4. **d.** L'organisateur gagne ce que le joueur perd : il faut $E(G)=3{,}5-m=-0{,}5$.
   $3{,}5+0{,}5=4$
   il doit fixer la mise à 4 €.

---

6 **Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.**

1. **a. Faux.** Si X vaut 0 ou 1 avec la probabilité 0,5 chacun, $E(X)=0{,}5$, valeur que X ne prend jamais.
   $0\times 0{,}5+1\times 0{,}5=0{,}5$
2. **b. Faux.** $V(X)=\sum p_i\,(x_i-\mu)^2$ est une somme de produits de nombres positifs, donc $V(X)\geqslant 0$.
3. **c. Vrai.** Par linéarité, $E(2X-1)=2E(X)-1$:
   $2\times 3-1=5$
4. **d. Faux.** Les valeurs ne sont pas forcément équiprobables : $P(X=1)=0{,}5$ et $P(X=2)=P(X=3)=0{,}25$ définissent une loi, de somme 1.
5. **e. Vrai.** König-Huygens :
   $5-2^2=1$
   donc $\sigma(X)=\sqrt{1}=1$.
6. **f. Faux.** Équitable signifie $E(G)=0$: un gain nul **en moyenne**. Au jeu A du cours, le joueur perd 2 € une fois sur deux.

---

7 **Algorithmique. On reprend les fonctions Python parametres, X et moyenne du cours ; X simule le jeu du dé ($\mu = 1/6$, $\sigma \approx 2{,}544$).**

1. **a.** Dans la première boucle, E vaut 0, puis $0 + 0{,}2 \times 0 = 0$, puis $0 + 0{,}5 \times 1 = 0{,}5$, puis : $0{,}5 + 0{,}3 \times 2 = 1{,}1$
2. La seconde boucle somme les $p_i\,(x_i - E)^2$: $0{,}2 \times 1{,}21 + 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}81 = 0{,}49$
   la fonction renvoie environ (1.1, 0.49, 0.7) : $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ de l'exercice 4, aux erreurs d'arrondi de la machine près.
3. **b.** Chaque appel tire 1 000 nouveaux nombres au hasard : les échantillons diffèrent, leurs moyennes aussi. Elles sont proches de $\mu \approx 0{,}17$, le plus souvent à moins de $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}16$ près.
4. **c.** La borne, avec $\sqrt{400} = 20$, vaut $\dfrac{2 \times 2{,}544}{20} \approx 0{,}25$. La proportion : $\frac{189}{200} = 0{,}945$
   94,5 % des moyennes sont à moins de 0,25 de l'espérance.
5. **d.** On initialise un compteur c = 0 ; pour chaque caractère car de texte, si car == lettre, on ajoute 1 à c ; on renvoie c / len(texte). Appliquée à chaque lettre, sur un long texte de chaque langue, elle donne deux distributions de fréquences, que l'on peut comparer : elles diffèrent d'une langue à l'autre.

---

8 **Pourquoi l'espérance ? Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1, \dots, x_n$ et de probabilités $p_1, \dots, p_n$, d'espérance μ et de variance V. Pour tout réel x, on pose $f(x) = E\big((X - x)^2\big)$.**

1. **a.** $f(x) = \sum p_i\,(x_i - x)^2 = \sum p_i\,(x_i^2 - 2x\,x_i + x^2)$. On sépare les trois sommes : $\sum p_i\,x_i^2 = E(X^2)$, $\sum p_i\,x_i = \mu$ et $\sum p_i = 1$, donc $f(x) = x^2 - 2\mu x + E(X^2)$.
2. **b.** f est une fonction polynôme du second degré, de coefficient de x^2 égal à $1 > 0$: elle admet un minimum, atteint en $x = -\dfrac{-2\mu}{2 \times 1} = \mu$.
3. Ce minimum vaut $f(\mu) = \mu^2 - 2\mu^2 + E(X^2) = E(X^2) - \mu^2$, c'est-à-dire V par la formule de König-Huygens.
4. **c.** Exercice 4 : $\mu = 1{,}1$ et $E(X^2) = 1{,}7$, donc $f(x) = x^2 - 2{,}2x + 1{,}7$, minimale en $x = 1{,}1$: $1{,}1^2 - 2{,}2 \times 1{,}1 + 1{,}7 = 0{,}49$
   on retrouve $V(X) = 0{,}49$.
5. **Conclusion** : l'espérance est le réel dont X s'écarte le moins en moyenne des carrés des écarts, et cet écart minimal est la variance.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Définir X et traduire les événements $\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$	3 pts	« au moins » traduit par une inégalité stricte ; écrire $P(X)$ ou confondre événement et probabilité
Déterminer la loi : valeurs distinctes, probabilités regroupées, somme 1	4 pts	Supposer les valeurs équiprobables ; oublier une valeur ou ne pas contrôler la somme
Calculer et interpréter une espérance	4 pts	Moyenne simple des valeurs sans pondération ; « on gagne $E(X)$ à chaque partie »
Conclure sur un jeu équitable ou une mise	3 pts	Calculer l'espérance du montant reçu sans retirer la mise
Variance et écart type, avec l'unité	4 pts	Soustraire $E(X)$ au lieu de son carré ; une variance négative laissée sans réaction ; pas de racine pour σ
Simuler et comparer moyenne observée et espérance	2 pts	Deux tirages au hasard pour une même partie ; confondre moyenne observée et espérance