COURS

1re

Variables aléatoires — Loi, espérance et variance

Programme de spécialité mathématiques de première générale — arrêté du 26 février 2026, BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602917A

Un forain fait payer 4 € pour lancer sa roue ; on peut gagner jusqu'à 20 €. Faut-il jouer ? **Une variable aléatoire associe un nombre à chaque issue ; sa loi donne la probabilité de chacune de ses valeurs ; son espérance, moyenne de ces valeurs pondérées par leurs probabilités, est ce que l'on obtient en moyenne sur un grand nombre de répétitions.**

1 Variable aléatoire, événements et loi

DÉFINITION

L'univers Ω d'une expérience aléatoire est **fini** et muni d'une probabilité P. Une **variable aléatoire réelle** X est une **fonction définie sur Ω, à valeurs réelles** : à chaque issue ω, elle associe un nombre $X(\omega)$. On note $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Elle modélise un **résultat numérique** de l'expérience : un gain, un nombre de succès, une somme.

DÉFINITION

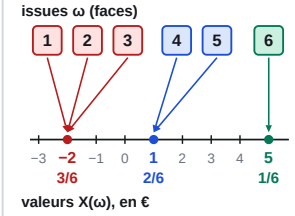
Pour un réel a, $\{X = a\}$ est l'**événement** formé des issues ω telles que $X(\omega) = a$; de même $\{X \leqslant a\}$, $\{X > a\}$… Ce sont des **ensembles d'issues** ; $P(X = a)$ et $P(X \leqslant a)$ sont des **nombres**. « $P(X)$ » n'a aucun sens : X est une fonction, pas un événement.

EXEMPLE

Le jeu du dé. On lance un dé équilibré. On gagne 5 € si l'on obtient 6, 1 € si l'on obtient 4 ou 5, et l'on perd 2 € sinon ; X est le gain algébrique. Calculer $P(X = -2)$, puis la probabilité de gagner de l'argent.

1. $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, équiprobable. Une perte est un gain négatif : $\{X = -2\} = \{1, 2, 3\}$, d'où $P(X = -2) = \dfrac{3}{6}$. Gagner de l'argent, c'est $\{X > 0\} = \{4, 5, 6\}$: $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$P(X = -2) = \dfrac{1}{2}$ **et** $P(X > 0) = \dfrac{1}{2}$.



X est une fonction : une flèche part de chaque issue, et trois faces donnent -2.

PASSER DE LA PHRASE AU SYMBOLE, ET INVERSEMENT

1. **Traduire le mot-clé** : « au moins a » donne $X \geqslant a$, car a est inclus ; « au plus a », $X \leqslant a$; « plus de a », $X > a$; « moins de a », $X < a$. Inversement, $\{X \leqslant 1\}$ se dit « le gain est d'au plus 1 € ».
   traduire « au moins 3 » par $X > 3$ fait perdre la valeur 3, et sa probabilité avec.
2. **Lister les valeurs** de X que contient l'événement, et passer au contraire quand c'est plus court : $P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 5) = \dfrac{5}{6}$ au jeu du dé.

DÉFINITION

Soit $x_1, \dots, x_n$ les valeurs **distinctes** prises par X. **Déterminer la loi de X**, c'est donner chaque probabilité $p_i = P(X = x_i)$, dans un **tableau** ; on la représente par un **diagramme en bâtons**. Les événements $\{X = x_i\}$ partagent l'univers sans se chevaucher : les p_i sont positifs et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

DÉTERMINER LA LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

1. **Décrire l'univers** par un arbre ou un tableau à double entrée, et calculer $X(\omega)$ pour chaque issue.
2. **Regrouper** : $P(X = x_i)$ est la somme des probabilités des issues qui donnent x_i (en cas d'équiprobabilité, leur nombre sur le nombre total d'issues). **Contrôler** que la somme vaut 1.

EXEMPLE

On lance deux dés équilibrés ; X est l'**écart** entre les deux faces, la plus grande moins la plus petite. Déterminer la loi de X.

1. Les $6 \times 6 = 36$ couples sont équiprobables. Dans le tableau, 6 cases donnent 0 (la diagonale), 10 donnent 1, puis 8, 6, 4 et 2 donnent 2, 3, 4 et 5. Ainsi : $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
2. Contrôle de la somme : $\frac{6+10+8+6+4+2}{36} = 1$

pour les valeurs 0 à 5, $p_i = \frac{6}{36}, \frac{10}{36}, \frac{8}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{2}{36}$: voir le tableau plus bas.

1er \ 2e dé	1	2	3	4	5	6
1	0	**1**	2	3	4	5
2	**1**	0	**1**	2	3	4
3	2	**1**	0	**1**	2	3
4	3	2	**1**	0	**1**	2
5	4	3	2	**1**	0	**1**
6	5	4	3	2	**1**	0

Les 36 issues ; les dix cases bleues forment $\{X = 1\}$.

PIÈGE

« X prend six valeurs, donc $P(X = 1) = \frac{1}{6}$. » — ce sont les **issues** qui sont équiprobables, pas les **valeurs** de X : la valeur 1 est obtenue par dix couples, la valeur 5 par deux.

Ce que ça coûte : la loi entière, et l'espérance et la variance qui en découlent

Le réflexe : compter les issues qui donnent la valeur, puis diviser par le nombre total d'**issues**.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

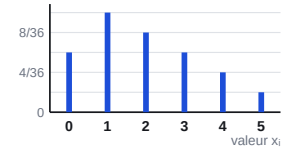


Tableau de la loi et diagramme en bâtons, colonne par colonne.

2 L'espérance, et les jeux équitables

DÉFINITION

L'**espérance** de X est la moyenne de ses valeurs **pondérées par leurs probabilités**, dans l'unité de X. On l'interprète comme la **valeur moyenne** prise par X sur un très grand nombre de répétitions de l'expérience ; ce n'est pas forcément une valeur que X peut prendre. Si X est un caractère numérique d'un individu tiré au sort, avec équiprobabilité, dans une population, la loi de X est la distribution des **fréquences** du caractère et $E(X)$ en est la **moyenne**.

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$$

Au jeu du dé, $E(X) = -2 \times \frac{3}{6} + 1 \times \frac{2}{6} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$ € : le joueur gagne en moyenne 17 centimes par partie, mais jamais 17 centimes lors d'une partie donnée.

PROPRIÉTÉ

Linéarité de l'espérance (démontrée). En regroupant les issues selon la valeur de X, $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})\, X(\omega)$. Pour deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω et a, b réels, on en tire $\sum P(\{\omega\})\big(aX(\omega) + b\big) = aE(X) + b$, car $\sum P(\{\omega\}) = 1$; de même pour $X + Y$. Ainsi la somme de deux dés a pour espérance $3{,}5 + 3{,}5 = 7$, sans passer par sa loi.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \qquad E(aX + b) = aE(X) + b$$

DÉCIDER SI UN JEU EST ÉQUITABLE

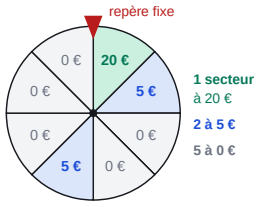
1. **Définir le gain net** G : ce que le joueur reçoit, **moins** sa mise m. Si R est le montant reçu, $G = R - m$ et $E(G) = E(R) - m$.
2. **Conclure sur le signe de** $E(G)$: jeu **équitable** si $E(G) = 0$, **favorable au joueur** si $E(G) > 0$, défavorable sinon. La mise équitable est $m = E(R)$.

EXEMPLE

La roue a huit secteurs égaux : un rapporte 20 €, deux 5 €, cinq rien. Quelle mise rend le jeu équitable ? Et à 4 € ?

1. Chaque secteur a la probabilité $\frac{1}{8}$; R vaut 20, 5 ou 0 avec les probabilités $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{5}{8}$.
   $20 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{2}{8} + 0 \times \frac{5}{8} = 3{,}75$
2. Mise équitable : $m = E(R) = 3{,}75$ €. À 4 €, par linéarité :
   $3{,}75 - 4 = -0{,}25$

à 4 €, le joueur perd en moyenne 25 centimes par partie : le jeu lui est défavorable.



Huit secteurs égaux.

PIÈGE

Calculer $E(R) = 3{,}75$ et conclure que le jeu « rapporte 3,75 € par partie ». — R est ce que le joueur **reçoit**, pas ce qu'il **gagne** : la mise n'a pas été retirée.

Ce que ça coûte : la conclusion « équitable » ou « favorable », souvent toute la question

Le réflexe : pour chaque valeur, se demander si le joueur est plus riche ou plus pauvre qu'avant de jouer.

3 Variance et écart type

DÉFINITION

Soit $\mu = E(X)$. La **variance** est la moyenne, pondérée par les probabilités, des **carrés des écarts** à μ ; elle est positive ou nulle. L'**écart type** est sa racine carrée, dans l'**unité de X**. Ils mesurent la **dispersion** des valeurs autour de μ : pour un jeu, le **risque**.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, (x_i - \mu)^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

PROPRIÉTÉ

Formule de König-Huygens (démontrée). $V(X) = E\big((X-\mu)^2\big) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$ par linéarité. Ici $E(X^2) = \sum p_i \, x_i^2$: on élève au carré les **valeurs**.

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

CALCULER UNE VARIANCE

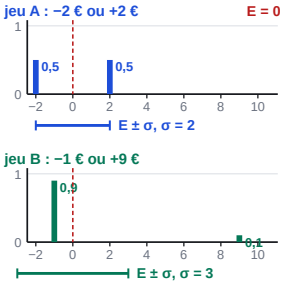
1. **Ajouter au tableau de la loi** les lignes $p_i \, x_i$ et $p_i \, x_i^2$; leurs sommes sont $E(X)$ et $E(X^2)$.
2. **Appliquer König-Huygens**, puis la racine carrée. Une variance négative signale toujours une erreur.

EXEMPLE

Jeu A : gagner 2 € ou perdre 2 €, avec la probabilité 0,5 chacun. Jeu B : perdre 1 € avec la probabilité 0,9, gagner 9 € avec la probabilité 0,1. Comparer les gains X_A et X_B.

1. Jeu A : $E(X_A) = 0$ et les deux valeurs ont pour carré 4, donc $V(X_A) = 4 - 0^2 = 4$.
   $\sqrt{4} = 2$
2. Jeu B : $E(X_B) = -1 \times 0{,}9 + 9 \times 0{,}1 = 0$, puis $E(X_B^2)$:
   $1 \times 0{,}9 + 81 \times 0{,}1 = 9$
   $V(X_B) = 9 - 0^2 = 9$, donc $\sigma(X_B) = 3$.

deux jeux équitables, mais B est plus risqué : $\sigma = 3$ € contre 2 €.



Même espérance nulle (en rouge), dispersions différentes ; sous chaque axe, de $E - \sigma$ à $E + \sigma$.

PIÈGE

Écrire $V(X) = E(X^2) - E(X)$, ou confondre $E(X^2)$ et $\big(E(X)\big)^2$. — on soustrait le **carré** de l'espérance. Et $E(X^2) \neq \big(E(X)\big)^2$ en général : au jeu A, $E(X_A^2) = 4$ mais $\big(E(X_A)\big)^2 = 0$, et leur différence est justement la variance.

Ce que ça coûte : la variance, l'écart type et la comparaison qui suit

Le réflexe : vérifier que $V(X) \geqslant 0$ et que σ est dans l'unité de X.

4 Simuler pour estimer une espérance

renvoyer l'espérance, la variance, l'écart type

```
from math import sqrt
def parametres(x, p):
    E = 0
    for i in range(len(x)):
        E = E + p[i] * x[i]
    V = 0
    for i in range(len(x)):
        V = V + p[i] * (x[i] - E)**2
    return E, V, sqrt(V)
parametres([-2, 1, 5], [3/6, 2/6, 1/6])
```

simuler X, puis un échantillon de taille n

```
from random import random
def X():
    u = random()           # u dans [0 ; 1[
    if u < 1/2: return -2  # faces 1, 2, 3
    if u < 5/6: return 1   # faces 4, 5
    return 5               # face 6
def moyenne(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + X()
    return s / n
```

À gauche, l'appel final renvoie environ (0.167, 6.47, 2.54). À droite, un seul tirage de u par partie.

MESURER L'ÉCART ENTRE MOYENNE OBSERVÉE ET ESPÉRANCE

1. **Simuler** X en tirant u au hasard dans $[0\,;1[$, découpé en morceaux de longueurs $p_1, \ldots, p_n$. n simulations indépendantes forment un **échantillon de taille** n ; pour n grand, sa moyenne m est en général proche de $E(X)$, qu'elle **estime**. On simule N tels échantillons.
2. **Mesurer l'écart** : compter ceux où $|m-\mu| \leqslant \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$, avec $\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$, puis **diviser par** N.

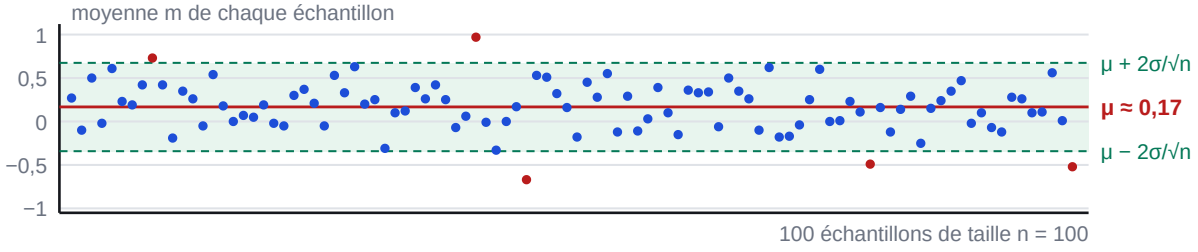
EXEMPLE

Jeu du dé, $\mu = \dfrac{1}{6}$: calculer σ, la borne $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour $n = 100$, et la proportion sur la simulation ci-dessous ($N = 100$).

1. $E(X^2) = \dfrac{4\times 3 + 1\times 2 + 25\times 1}{6} = \dfrac{39}{6}$, et König-Huygens donne $V(X) = \dfrac{39}{6} - \dfrac{1}{36} = \dfrac{233}{36}$: $\sigma = \frac{\sqrt{233}}{6} \approx 2{,}544$
2. La borne, avec $\sqrt{100} = 10$: $\frac{2\times 2{,}544}{10} \approx 0{,}51$

   95 moyennes sur 100 sont dans la bande verte : proportion 0,95. La borne diminue quand n augmente.

d'une simulation à l'autre, la proportion reste le plus souvent voisine de 0,95.



Une simulation : en bleu, les 95 moyennes situées à moins de 0,51 de μ (la borne de l'exemple) ; en rouge, les 5 autres.

PIÈGE

Au tableur, simuler le jeu par =SI(ALEA()<1/2;-2;SI(ALEA()<5/6;1;5)). — chaque ALEA() tire un nombre **différent** : 1 sort avec la probabilité $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{12}$, et non $\dfrac{2}{6}$.

Ce que ça coûte : toute la simulation, qui estime une autre loi que celle de l'énoncé

Le réflexe : un seul tirage par partie : =ALEA() en A1, puis =SI(A1<1/2;-2;SI(A1<5/6;1;5)).

À VÉRIFIER

- Valeurs **distinctes**, probabilités de somme 1 ?
- La **mise** retirée avant de conclure ?
- Variance **positive**, **carré** de l'espérance soustrait ?

À RETENIR

- X : une **fonction** $\Omega \to \mathbb{R}$. $\{X = a\}$: un événement ; $P(X = a)$: un nombre.
- **Loi** : les $p_i = P(X = x_i)$, de somme 1.
- $E(X) = \sum p_i\, x_i$, $E(aX + b) = aE(X) + b$. **Équitable** : $E(\text{gain net}) = 0$.
- $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.