EXERCICES

1re

# Variables aléatoires — Loi, espérance et variance

Nom : _____
Classe : _____

> Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

## 1 Un QCM comporte quatre questions. On note $X$ le nombre de bonnes réponses d'un candidat qui répond au hasard. ●○○

**a.** Écrire avec $X$ l'événement « le candidat a au moins 3 bonnes réponses ».

**b.** Même question pour « le candidat a moins de 2 bonnes réponses ».

**c.** Traduire en langue naturelle l'événement $\{X \leqslant 3\}$, puis son contraire.

**d.** Que vaut $P(X > 4)$ ? Justifier.

**e.** On admet que $P(X = 4) = \dfrac{1}{16}$. Calculer $P(X \leqslant 3)$.

## 2 La loi d'une variable aléatoire $X$ est donnée par le tableau : valeurs $-1$, 0, 2 et 5, de probabilités respectives 0,3 ; 0,25 ; $a$ et 0,1. ●○○

**a.** Calculer $a$.

**b.** Calculer $P(X \geqslant 0)$ et $P(X \leqslant 2)$.

**c.** Calculer $E(X)$.

| $x_i$ | −1 | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,3 | 0,25 | a | 0,1 |

*La loi de $X$.*

**3** **Un sac contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On tire un jeton, on note son numéro, on le remet, puis on en tire un second. $X$ est la somme des deux numéros.** ●●○

**a.** Décrire l'univers par un tableau à double entrée et justifier que ses issues sont équiprobables.

**b.** Déterminer la loi de $X$.

**c.** Représenter cette loi par un diagramme en bâtons.

**d.** Calculer $E(X)$ avec la loi, puis retrouver le résultat par linéarité.

**4** **Une machine tombe en panne 0, 1 ou 2 fois par semaine. Le nombre $X$ de pannes d'une semaine suit la loi : $P(X=0)=0{,}2$, $P(X=1)=0{,}5$ et $P(X=2)=0{,}3$.** ●●○

**a.** Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

**b.** Calculer $V(X)$ par la formule de König-Huygens, puis $\sigma(X)$.

**c.** Retrouver $V(X)$ à l'aide de la définition.

**d.** Chaque panne coûte 400 € de réparation et l'entretien coûte 100 € par semaine. Exprimer le coût hebdomadaire $C$ en fonction de $X$, puis calculer $E(C)$.

**5** **Pour jouer, on paie une mise de $m$ euros, puis on lance deux pièces équilibrées. Deux « pile » : on reçoit 10 € ; un seul « pile » : 2 € ; aucun : rien.** ●●○

**a.** On note $R$ le montant reçu. Déterminer la loi de $R$ et calculer $E(R)$.

**b.** Ici $m=3$. Déterminer la loi du gain net $G$ et calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

**c.** Quelle mise rend le jeu équitable ?

**d.** L'organisateur veut gagner en moyenne 0,50 € par partie. Quelle mise doit-il fixer ?

## 6 Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse. ●●○

**a.** Si $E(X) = 0{,}5$, alors $P(X = 0{,}5) > 0$.

**b.** Une variance peut être négative.

**c.** Si $E(X) = 3$, alors $E(2X - 1) = 5$.

**d.** Si $X$ prend les seules valeurs 1, 2 et 3, alors $P(X = 1) = 1/3$.

**e.** Si $E(X) = 2$ et $E(X^2) = 5$, alors $\sigma(X) = 1$.

**f.** Un jeu équitable ne fait jamais perdre d'argent.

| Énoncé | Ta réponse | Pourquoi ? |
|---|---|---|
| **a.** Si $E(X) = 0{,}5$, alors $P(X = 0{,}5) > 0$. | | |
| **b.** Une variance peut être négative. | | |
| **c.** Si $E(X) = 3$, alors $E(2X - 1) = 5$. | | |
| **d.** Si $X$ prend les seules valeurs 1, 2 et 3, alors $P(X = 1) = 1/3$. | | |
| **e.** Si $E(X) = 2$ et $E(X^2) = 5$, alors $\sigma(X) = 1$. | | |
| **f.** Un jeu équitable ne fait jamais perdre d'argent. | | |

## 7 Algorithmique. On reprend les fonctions Python parametres, X et moyenne du cours ; X simule le jeu du dé ($\mu = 1/6$, $\sigma \approx 2{,}544$). ●●●

**a.** Que renvoie parametres([0, 1, 2], [0.2, 0.5, 0.3]) ? Donner les valeurs successives de E dans la première boucle.

**b.** On exécute trois fois moyenne(1000). Pourquoi obtient-on trois résultats différents ? Autour de quelle valeur ?

**c.** On simule $N = 200$ échantillons de taille $n = 400$ : 189 ont une moyenne $m$ telle que $|m - \mu| \leqslant \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$. Calculer cette borne au centième, et la proportion obtenue.

**d.** Écrire une fonction frequence(texte, lettre) qui renvoie la fréquence d'apparition de lettre dans texte, écrit en minuscules sans espaces ni ponctuation. À quoi peut-elle servir pour un texte en français et un texte en anglais ?

## 8 Pourquoi l'espérance ? Soit $X$ une variable aléatoire de valeurs $x_1, \dots, x_n$ et de probabilités $p_1, \dots, p_n$, d'espérance $\mu$ et de variance $V$. Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = E\big((X - x)^2\big)$. ●●●

**a.** Montrer que $f(x) = x^2 - 2\mu x + E(X^2)$.

**b.** En déduire que $f$ admet un minimum, atteint en $x = \mu$, et que ce minimum vaut $V$.

**c.** Application à la loi de l'exercice 4 : écrire $f(x)$ et calculer son minimum.

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Variables aléatoires — Loi, espérance et variance ».