

COURS

Introduction à la trigonométrie — radian et cercle unité

2^{de}

Programme de seconde générale et technologique — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Au collège, cosinus et sinus étaient des rapports de longueurs dans un triangle rectangle — et n'existaient donc que pour des angles compris entre 0° et 90°. Le **cercle trigonométrique** les libère de cette contrainte : ils deviennent les coordonnées d'un point qui tourne, et se définissent pour n'importe quel angle, positif, négatif, ou supérieur à un tour.

1 Une nouvelle unité d'angle

DÉFINITION

Le **radian** mesure un angle par la longueur de l'arc qu'il découpe sur un cercle de rayon 1. Le tour complet mesurant 2π dans cette unité et 360° dans l'autre, la conversion découle d'une simple proportionnalité : un demi-tour vaut π radians ou 180° .

$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{deg}} \times \frac{\pi}{180}$$

EXEMPLE

Convertir 60° en radians, puis $\frac{\pi}{4}$ en degrés.

① De degrés vers radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$: $60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$.

② Le calcul se fait sur les nombres, sans toucher à π .

$$\frac{60}{180} \approx 0,33$$

③ De radians vers degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$: le π se simplifie.

$$\frac{180}{4} = 45$$

④ Le raccourci à retenir : $180^\circ = \pi$. Toutes les conversions courantes s'en déduisent par division.

$$\frac{\pi}{6} = 30^\circ, \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \frac{\pi}{3} = 60^\circ, \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ et } \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

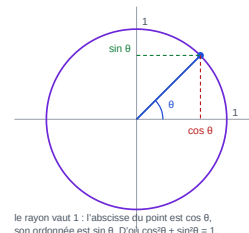
Le radian n'est pas une complication gratuite. Il est le seul choix qui rende les formules de dérivation des fonctions trigonométriques simples, et il fait de la mesure d'un angle une **longueur** — celle de l'arc parcouru. C'est cette identification qui permettra plus tard d'enrouler la droite des réels autour du cercle.

2 Le cercle trigonométrique

DÉFINITION

On place le cercle de **rayon 1** centré à l'origine d'un repère orthonormé. À un angle θ , mesuré depuis l'axe des abscisses et dans le sens **inverse des aiguilles d'une montre**, correspond un unique point M du cercle. Par définition, $\cos \theta$ est l'**abscisse** de M et $\sin \theta$ son **ordonnée**.

$$M(\cos \theta ; \sin \theta)$$



le rayon vaut 1 : l'abscisse du point est $\cos \theta$, son ordonnée est $\sin \theta$. D'où $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Le cosinus se lit à l'horizontale, le sinus à la verticale.

PROPRIÉTÉ

Deux conséquences immédiates de cette définition. Le point étant sur un cercle de rayon 1, ses coordonnées sont comprises entre -1 et 1 : c'est pourquoi un cosinus ou un sinus ne peut jamais dépasser 1. Et le théorème de Pythagore appliqué au triangle formé par M , l'origine et sa projection donne la **relation fondamentale**.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Annoncer un cosinus de 1,3 après un calcul. — c'est impossible : le point serait hors du cercle de rayon 1. Un tel résultat signale toujours une erreur — de calcul, ou de mode sur la calculatrice.

Le réflexe : vérifier systématiquement que le résultat appartient à $[-1 ; 1]$. C'est un contrôle gratuit, et il attrape la moitié des erreurs du chapitre.

3 Les valeurs remarquables

θ	0	$\pi/6 \cdot 30^\circ$	$\pi/4 \cdot 45^\circ$	$\pi/3 \cdot 60^\circ$	$\pi/2$
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

le cosinus descend de 1 à 0, le sinus monte de 0 à 1 : les deux lignes se lisent en sens inverse.

Cinq colonnes à connaître par cœur, et deux lignes qui se lisent en miroir.

Ces valeurs se retiennent mieux avec l'écriture $\frac{\sqrt{k}}{2}$: le cosinus prend successivement $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ — soit k qui descend de 4 à 0. Le sinus fait exactement l'inverse. Une seule suite à mémoriser au lieu de dix valeurs.

EXEMPLE

Sachant que $\cos \theta = \frac{3}{5}$ et que θ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, calculer $\sin \theta$.

① On applique la relation fondamentale : $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$.

② On calcule le carré du cosinus.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0,36$$

③ D'où le carré du sinus.

$$1 - 0,36 = 0,64$$

④ On prend la racine.

$$\sqrt{0,64} = 0,8$$

⑤ Le carré admet deux racines, 0,8 et -0,8. C'est l'intervalle donné qui tranche : entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, le point est dans le quart de plan supérieur droit, donc son ordonnée est positive.

sans cette indication, la question n'aurait pas de réponse unique.

$\sin \theta = 0,8$, soit $\frac{4}{5}$

À VÉRIFIER

- $180^\circ = \pi$: ai-je converti dans le bon sens ?
- Le sens **positif** est celui inverse des aiguilles d'une montre.
- Cosinus = **abscisse**, sinus = **ordonnée**. Jamais l'inverse.
- Mon résultat appartient-il bien à $[-1 ; 1]$?
- Après une racine carrée : ai-je choisi le signe grâce à l'intervalle donné ?
- Ma calculatrice est-elle dans la bonne unité — degrés ou radians ?

À RETENIR

- $180^\circ = \pi$ radians — toutes les conversions en découlent.
- Sens **positif** : inverse des aiguilles d'une montre.
- Sur le cercle de rayon 1 : $\cos \theta = \text{abscisse}$, $\sin \theta = \text{ordonnée}$.
- Cosinus et sinus appartiennent toujours à $[-1 ; 1]$.
- **Relation fondamentale** : $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.
- Cosinus : $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ — le sinus fait l'inverse.
- Après une racine carrée : c'est l'**intervalle** qui choisit le signe.
- Les signes se lisent sur un croquis : aucun tableau à apprendre.