

COURS

Équations et inéquations — premier et second degré

2^{de}

Programme de seconde générale et technologique — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Résoudre une équation, c'est trouver les nombres qui la rendent vraie. Résoudre une **inéquation**, c'est trouver ceux qui la rendent vraie *aussi* — mais il y en a en général une infinité, et la réponse n'est plus une liste : c'est un **intervalle**. Ce changement de nature de la réponse est ce qui déroute le plus en début de seconde, avant même la règle du signe.

1 Le premier degré

RÉSOUTRE $AX + B = C$

- ① **Rassembler** les x d'un côté, les nombres de l'autre, en changeant le signe de tout terme qui traverse le signe égal.
- ② **Diviser** les deux membres par le coefficient de x .
- ③ **Vérifier** en remplaçant dans l'équation **de départ** — jamais dans une ligne intermédiaire, qui pourrait déjà contenir l'erreur. cette vérification coûte dix secondes et attrape toutes les erreurs de signe.

RÈGLE

Une **inéquation** se résout exactement de la même façon, avec une seule différence, qui n'admet aucune exception : **multiplier ou diviser les deux membres par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité**. Ajouter ou soustraire, en revanche, ne change jamais rien.

$$-3x > 12 \iff x < -4$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Résoudre $-3x > 12$ en écrivant $x > -4$. — on a divisé par -3 sans retourner l'inégalité. Un contrôle immédiat le montre : pour $x = 0$, on aurait $0 > 12$, ce qui est faux ; pour $x = -5$, on obtient $15 > 12$, ce qui est vrai.

Le réflexe : entourer le nombre par lequel on divise. S'il est négatif, retourner le symbole **avant** d'écrire la ligne suivante — et non après, quand on a oublié.

La solution d'une inéquation s'écrit comme un **intervalle**, et la notation compte : $[-4 ; +\infty[$ inclut -4 , $] -4 ; +\infty[$ ne l'inclut pas. Le crochet tourné vers l'extérieur exclut la borne. L'infini n'étant pas un nombre, son crochet est toujours ouvert.

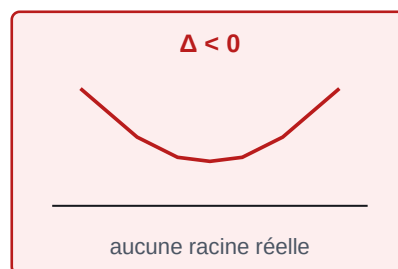
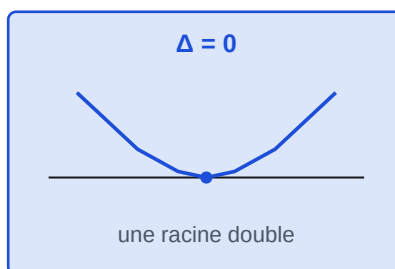
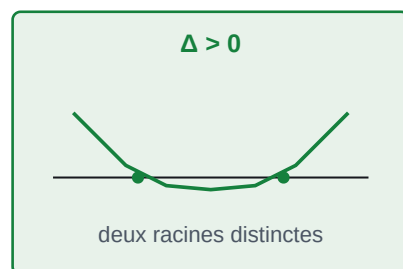
2 Le second degré

RÈGLE

Une équation du second degré s'écrit $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$. Son **discriminant** décide de tout : $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, il y a deux racines ; si $\Delta = 0$, une seule, dite double ; si $\Delta < 0$, aucune racine réelle.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

le signe de Δ dit combien de fois la parabole coupe l'axe des abscisses



Trois signes, trois positions de la parabole.

EXEMPLE

Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.

- ① On identifie les coefficients : $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$. Le signe de b fait partie du coefficient.
- ② On calcule le discriminant.
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$
- ③ $\Delta > 0$: deux racines. On applique la formule.
 $\frac{5+1}{2} = 3$
- ④ Puis la seconde.
 $\frac{5-1}{2} = 2$
- ⑤ Vérification sur la racine 3, dans l'équation de départ.
 $3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0$
les solutions sont 2 et 3.

$$S = \{2; 3\}$$

EXEMPLE

Résoudre $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

- ① Ici $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$.
 $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$
- ② Attention au double signe : $-4ac$ avec c négatif donne une **addition**.
- ③ La racine de 25 vaut 5.
 $\frac{-3+5}{4} = 0,5$
- ④ Puis l'autre.
 $\frac{-3-5}{4} = -2$
les solutions sont 0,5 et -2 .

$$S = \{-2; 0,5\}$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 - 16 = -7$. — le produit $-4 \times 2 \times (-2)$ vaut $+16$: deux facteurs négatifs donnent un résultat positif. L'erreur transforme une équation à deux solutions en une équation sans solution.

Le réflexe : calculer $4ac$ à part, avec son signe, puis le soustraire. Ici $4ac = -16$, donc $\Delta = 9 - (-16) = 25$.

Quand $\Delta > 0$, l'expression se **factorise** : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines. C'est cette forme qui permet ensuite d'étudier le signe du trinôme — et c'est la raison pour laquelle on cherche des racines même quand on ne résout pas d'équation.

À VÉRIFIER

- Ai-je retourné l'inégalité en divisant par un nombre **négatif** ?
- Ma solution d'inéquation est-elle écrite comme un **intervalle**, crochets compris ?
- Pour Δ : ai-je pris b et c **avec leur signe** ?
- Ai-je calculé $4ac$ à part avant de le soustraire ?
- $\Delta < 0$: ai-je conclu « aucune solution réelle », sans forcer un calcul ?
- Ai-je vérifié une racine dans l'équation **de départ** ?

À RETENIR

- Multiplier ou diviser une inéquation par un **négatif** inverse le sens.
- Une solution d'inéquation s'écrit en **intervalle** ; l'infini a toujours un crochet ouvert.
- $\Delta = b^2 - 4ac$: deux racines si $\Delta > 0$, une si $\Delta = 0$, aucune si $\Delta < 0$.
- $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ — et b , c se prennent **avec leur signe**.
- Calculer $4ac$ à part, puis le soustraire : c'est là que naissent les erreurs de signe.
- Un **produit nul** ne se scinde que si l'autre membre vaut 0.
- Toute solution d'un problème mis en équation doit être **confrontée au contexte**.