

COURS

Fonctions de référence : carré, racine, inverse, cube

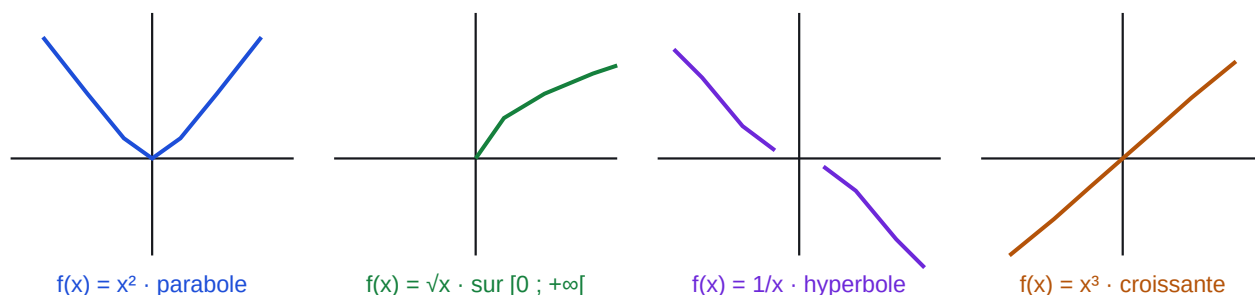
2^{de}

Programme de seconde générale et technologique — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Quatre fonctions reviennent partout, et il faut pouvoir les tracer de mémoire en dix secondes : x^2 , $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ et x^3 . Les connaître ne sert pas qu'à les reconnaître : la plupart des fonctions rencontrées ensuite sont l'une d'elles, déplacée, retournée ou étirée. Savoir la courbe de départ, c'est savoir la courbe d'arrivée.

1 Les quatre courbes

quatre courbes à reconnaître d'un coup d'œil, et à savoir tracer de mémoire



Quatre allures, à reconnaître sans hésiter.

PROPRIÉTÉ

La fonction carré $f(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$. Elle est **paire** : sa courbe, la **parabole**, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et son minimum vaut 0, atteint en 0.

PROPRIÉTÉ

La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ n'est définie que sur $[0 ; +\infty[$ et y est croissante. Sa courbe part de l'origine et monte de plus en plus lentement : elle n'a ni symétrie ni maximum.

PROPRIÉTÉ

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Elle est **impaire**, et sa courbe — l'**hyperbole** — est formée de deux branches symétriques par rapport à l'origine. Elle est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$, mais non sur leur réunion.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. — prendre $a = -1$ et $b = 1$: on a $a < b$, mais $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$, donc $f(a) < f(b)$. L'ordre est conservé — la fonction n'est donc pas décroissante sur cette réunion.

Le réflexe : un sens de variation s'annonce toujours **sur un intervalle**. Deux intervalles séparés exigent deux phrases distinctes.

PROPRIÉTÉ

La fonction cube $f(x) = x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et **croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier** — c'est la seule des quatre. Elle est **impaire**, et sa courbe traverse l'origine en s'aplatissant.

2 Comparer sans calculer

RÈGLE

Les variations permettent de comparer deux images sans les calculer. Sur un intervalle où f est croissante, $a < b$ entraîne $f(a) < f(b)$: l'ordre se transmet. Sur un intervalle décroissant, il s'inverse. C'est ainsi qu'on compare $\sqrt{7}$ et $\sqrt{8}$ — la racine étant croissante, $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ — sans ouvrir la calculatrice.

EXEMPLE

Comparer $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ et $\frac{1}{2}$, puis 3^2 et 3. Que remarque-t-on ?

① Le premier calcul.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

② Or $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$: élever au carré a **diminué** le nombre.

③ Le second calcul.

$$3^2 = 9$$

④ Cette fois $9 > 3$: élever au carré a augmenté le nombre.

le carré agrandit les nombres supérieurs à 1 et rapetisse ceux qui sont compris entre 0 et 1.

⑤ La frontière est 1, qui est son propre carré. C'est le contre-exemple à opposer à l'idée que « le carré, ça augmente ».

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2} \text{ et } 3^2 > 3$$

3 Transformations de courbes : translation et réflexion

RÈGLE

Trois transformations suffisent en seconde, et chacune se lit dans l'écriture. $f(x) + k$ **translate** la courbe vers le haut de k — vers le bas si k est négatif. $f(x + k)$ la translate vers la **gauche** de k : le signe est contre-intuitif, et c'est là que se perdent les points. $-f(x)$ la **retourne** par rapport à l'axe des abscisses : c'est une **réflexion**, et non une translation.

Le sens du décalage horizontal se retrouve sans l'apprendre. La courbe de $g(x) = (x - 3)^2$ atteint son minimum lorsque $x - 3 = 0$, c'est-à-dire en $x = 3$: le sommet de la parabole s'est donc déplacé vers la **droite**. Écrire $x - 3$ décale vers la droite, écrire $x + 3$ décale vers la gauche. Une vérification en trois secondes vaut mieux qu'une règle mal retenue.

À VÉRIFIER

- Puis-je tracer les quatre courbes de mémoire, avec leur domaine ?
- L'inverse est décroissante **sur chaque intervalle**, jamais sur leur réunion.
- Le **cube** est la seule des quatre à être croissante sur $\mathbb{R}$ entier.
- Pour comparer deux images : ai-je invoqué le **sens de variation** ?
- Élever au carré diminue les nombres entre 0 et 1 : y ai-je pensé ?
- Pour $f(x + k)$: ai-je vérifié le sens du décalage en annulant la parenthèse ?

À RETENIR

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Carré : $\mathbb{R}$, paire, minimum 0 en 0 — parabole.• Racine : $[0 ; +\infty[$, croissante, part de l'origine.• Inverse : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, impaire, décroissante sur chaque intervalle — hyperbole.• Cube : $\mathbb{R}$, impaire, croissante partout — la seule. | <ul style="list-style-type: none">• Comparer sans calculer : invoquer le sens de variation sur l'intervalle.• Le carré diminue les nombres compris entre 0 et 1. Points fixes : 0 et 1.• $f(x) + k$ monte · $f(x + k)$ va à gauche · $-f(x)$ retourne. |
|---|--|